Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Compito di Matematica

Pisa, 31 gennaio 2005

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Tempo 1 ora. Consegnare uno svolgimento completo degli esercizi.

1. Sia $A = \{-\sqrt{2}\} \cup]0,1]$. Determinare inf, sup e, se esistono, massimo e minimo di A e di $A \cap \mathbb{Q}$.

   Risp. $\inf_A = \min_A = -\sqrt{2}$ $\sup_A = \max_A = 1$ $\inf_{A\cap\mathbb{Q}} = 0$ $\min_{A\cap\mathbb{Q}} = \text{N.E.}$ $\sup_{A\cap\mathbb{Q}} = \max_{A\cap\mathbb{Q}} = 1$

2. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x\to 0^+} \arctan(\log(x)).$$

   Risp. $\lim_{x\to 0^+} \arctan(\log(x)) = -\pi/2.$

3. Scrivere la derivata di $x^{(x^3)}$.

$$\textbf{Risp.} \quad \frac{d}{dx} x^{(x^3)} = x^{(x^3)}(3x^2\log(x) + x^2)$$

4. Dire se è derivabile ovunque la funzione
$$f(x) = |x|^{9/7}$$

   Risp. Sì la funzione è derivabile su tutta la retta reale visto che
$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|^{9/7}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|^{9/7}}{h} = f'_-(0)$$

5. Determinare l'immagine della funzione
$$\frac{1}{|1-x^2|}.$$

   Risp. Studiando la fuzione si ha $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{|1-x^2|}\right) =]0,+\infty[$.

6. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$

   Risp. Applicando formula de l'Hôpital si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = 0.$

7. Calcolare
$$\int_0^2 (t-1)\mathrm{e}^{-t}\,dt$$

$$\textbf{Risp.}\quad t\mathrm{e}^{-t}|_0^2 = -\frac{2}{\mathrm{e}^2}$$

oppure determinare una primitiva di

$$\frac{x^2}{x^2+x-1}.$$

$$\textbf{Risp.}\quad x - \int \frac{(x-1)dx}{x^2+x-1} = x + \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\log(\sqrt{5}-1-2x) + \frac{-3\sqrt{5}-5}{10}\log(\sqrt{5}+1+2x)$$

8. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \log(x^2-3)$ nel punto $(2,0)$.

   Risp. $y = 4(x-2)$.

9. Risolvere $\begin{cases} x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 0 \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 1 \end{cases}$ oppure trovare tutte le soluzioni di $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = \mathrm{e}^t$

   Risp. $x(t) = t\mathrm{e}^{2t}$ $\qquad$ $x(t) = A\,\mathrm{e}^{2t} + B\,t\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^t$

10. Dire se è continua ovunque la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x^2} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

   Risp. Sì, si tratta di una funzione continua. Basta controllare la continuità in $x_0 = 0$.

11. Le funzioni f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono entrambe monotone decrescenti e derivabili su tutta la retta reale. Si può dire qualcosa sulla crescenza o decrescenza di $f \circ g$? Facoltativo: non usare la derivabilità.

   Risp. Si osservi che $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ e quindi la derivata di $f \circ g$ essendo il prodotto di due termini non positivi, risulta maggiore o uguale a zero e pertanto la funzione $f \circ g$, che è derivabile risulta crescente. Lo stesso risultato vale anche nel caso di funzioni non necessariamente derivabili ovunque, come si verifica usando direttamente la definizione di monotonia.

Tempo 40 minuti. Consegnare uno svolgimento completo degli esercizi.

1. Calcolare la parte reale di

$$\left(\frac{1-i}{i}\right)^2.$$

   Risp. $\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 = 2i$ quindi $Re\left[\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\right] = 0$.

2. Verificare se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 10 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

ed eventualmente completarli ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Risp. I vettori sono linearmente indipendenti (il secondo non è multiplo del primo). Per completarli ad una base basta prendere $v_3 = e_3$ e $v_4 = e_4$ (accostandoli si trova matrice triangolare inferiore con determinante non nullo).

3. Determinare se l'applicazione $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definita da

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 3x \\ 2y - x \end{pmatrix},$$

sia lineare o no.

4. Sì, si tratta di una applicazione lineare visto che con verifica immediata si può mostrare che $A(\lambda v) = \lambda A(v)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall v \in \mathbb{R}^2$ e anche $A(v + w) = A(v) + A(w)$, $\forall v, w \in \mathbb{R}^2$.

5. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Determinare, se esistono, tutte le soluzioni del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Risp. Per il teorema di Rouchè-Capelli il sistema ha soluzione e la soluzione non è unica, visto che il nucleo della matrice A è diverso dallo 0. Risolvendolo esplicitamente si trova $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} t - 2 \\ 9 - 3t \\ t \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$.

6. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Calcolare, se ciò è possibile, $A\,A^T$ e $A^T A$.

Risp. $A\,A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \qquad A^T A = (21).$

7. Dato $v = (1, 2)$ determinare l'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^2$ ortogonali a v e descriverlo geometricamente. **Risp.** Tale insieme è formato dai $w = (w_1, w_2)$ tali che $< w, v >= 0$, cioè da vettori del tipo $w = (-2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ e si tratta della retta ortogonale a v e passante per l'origine.

8. Determinare il nucleo della applicazione lineare individuata dalla seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Risp. Risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice si ottiene che il nucleo è formato dai vettori

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}.$$