Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Compito di Matematica

Pisa, 17 febbraio 2005

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Tempo 1 ora. Consegnare uno svolgimento completo degli esercizi.

1. Sia $A = \left\{1 - 1/n, \quad n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\right\}$. Determinare inf, sup e, se esistono, massimo e minimo di A.

   Risp. $\inf A = \min A = 0 \qquad \sup A = 1 \qquad \max A = \text{N.E.}$

2. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2)}{x^3}$$

   Risp. Applicando formula di de L'ôpital si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2)}{x^3} = 0$

3. Scrivere la derivata di $x^{\arctan(x)}$.
$$\textbf{Risp.} \quad \frac{d}{dx}x^{\arctan(x)} = x^{\arctan(x)}\left(\frac{\arctan(x)}{x} + \frac{\log(x)}{1+x^2}\right)$$

4. Dire se è derivabile ovunque la funzione
$$f(x) = \cos(|x|)$$

   Risp. Sì, la funzione è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

5. Determinare l'immagine della funzione
$$\frac{-x}{1+|x|}.$$

   Risp. $\text{Im}(\frac{-x}{1+|x|}) =]-1, 1[$.

6. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + e^x}{x + e^{x^2}}.$$

   Risp. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+e^x}{x+e^{x^2}} = 0$

7. Calcolare
$$\int_0^\pi (1+t)\sin(t)\,dt$$
$$\textbf{Risp.} \qquad \int_0^\pi (1+t)\sin(t)\,dt = -(t+1)\cos(t) + \sin(t)\Big|_0^\pi = 2 + \pi$$

oppure determinare una primitiva di
$$\frac{2x^2+3}{x^2+4}.$$
$$\textbf{Risp.}\quad 2x-\frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$$

8. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \log(x^2+x+1)$ nel punto $(0,0)$.

   Risp. $y = x$

9. Risolvere $\begin{cases} x''+3x'-4x=0 \\ x(0)=2, \quad x'(0)=2 \end{cases}$ oppure trovare tutte le soluzioni di $x''+3x'-4x=\cosh(t)$

   Risp. $x(t) = 2\mathrm{e}^t$ $\qquad x(t) = A\,\mathrm{e}^t + B\,\mathrm{e}^{-4t} - \frac{1}{12}\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{10}\,\mathrm{e}^t$

10. Dire se è continua la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \log(\cos(x^2)) & \text{se } x<0 \\ x^2+1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

    Risp. No, la funzione non è continua in 0 perchè $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$.

11. Sia f una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$. Calcolare
$$\frac{d}{dx}\int_x^2 f(t)\,dt.$$
    Calcolare inoltre
$$\frac{d}{dx}\int_0^{\sin(x)} f(t)\,dt.$$
    (Sugg. Chiamata F una primitiva di f, allora $\int \ldots$)
$$\textbf{Risp.}\quad \frac{d}{dx}\int_x^2 f(t)\,dt = -\frac{d}{dx}\int_2^x f(t)\,dt = -f(x).$$

Nel secondo caso, se F è una primitiva di f allora
$$\frac{d}{dx}\int_0^{\sin(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}[F(\sin(x)) - F(0)] = F'(\sin(x))\cos(x) = f(\sin(x))\cos(x).$$

Tempo 40 minuti. Consegnare uno svolgimento completo degli esercizi.

1. Calcolare la parte reale di
$$\frac{1}{3+2i}+\frac{1}{3-2i}.$$

   Risp. $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{3+2i}+\frac{1}{3-2i}\right) = 6/13.$

2. Determinare una coppia di valori $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tale che i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ siano linearmente indipendenti
$$v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$
Risp. Se $\lambda \neq 0$ allora i vettori sono linearmente indipendenti, qualsiasi valore assuma μ.

3. Determinare se l'applicazione $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definita da
$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(xy) \\ y + 2x \end{pmatrix},$$
sia lineare o no.

Risp. No, non è lineare. In particolare
$$A \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\lambda^2 xy) \\ \lambda y + 2\lambda x \end{pmatrix} \neq \lambda A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \sin(xy) \\ \lambda(y + 2x) \end{pmatrix}$$

4. Siano
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$
Calcolare, se ciò è possibile, $A\,B$ e $B\,A$.

Risp. Si può calcolare solo $B\,A$ che risulta
$$B\,A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

5. Siano $u = (1, 1)$ e $v = (1, 0)$. Esistono dei vettori $w \neq v$ tale che
$$< u, v > = < u, w > \qquad ?$$
Se si, descriverli geometricamente.

Risp. La condizione è soddisfatta se $< u, v - w > = 0$, cioè se il vettore $v - w$ è ortogonale a u. Ciò è verificato se
$$< u, v - w > = 1 \cdot (1 - w_1) + 1 \cdot (0 - w_2) = 1 - w_1 - w_2 = 0$$
e quindi per $w = (t, 1 - t)$, $t \in \mathbb{R}$. La soluzione quindi è data da una retta non passante per l'origine.

6. Determinare il nucleo e una base dell'immagine della applicazione lineare individuata dalla seguente matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$
Risp. Tramite la riduzione a scala si trova che
$$\mathrm{Ker}(A) = \{(3t, -2t, t) \qquad t \in \mathbb{R}\},$$
mentre
$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$