Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Compito di Matematica

Pisa, 17 febbraio 2005

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Tempo 1 ora. Consegnare uno svolgimento completo degli esercizi.

1. Sia $A = \left\{1 + 1/n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$. Determinare inf, sup e, se esistono, massimo e minimo di A.

   Risp. $\inf A = 1 \qquad \min A = \text{N.E.} \qquad \sup A = \max A = 2.$

2. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\log(x^3)}$$

   Risp. Applicando formula di de L'Hôpital si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\log(x^3)} = +\infty$

3. Scrivere la derivata di $[\arctan(x)]^x$.
$$\textbf{Risp.} \quad \frac{d}{dx}[\arctan(x)]^x = [\arctan(x)]^x \left(\log(\arctan(x)) + \frac{x}{(1+x^2)\arctan(x)}\right)$$

4. Dire se è derivabile ovunque la funzione
$$f(x) = \sin(|x|)$$

   Risp. No, la funzione non è derivabile in $x_0 = 0$, dove derivata destra e sinistra esistono ma sono diverse.

5. Determinare l'immagine della funzione
$$\frac{x}{1+|x|}.$$

   Risp. $\mathrm{Im}(\frac{x}{1+|x|}) =]-1, 1[$.

6. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \mathrm{e}^{x^2}}{x^2 + \mathrm{e}^x}.$$

   Risp. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\mathrm{e}^{x^2}}{x^2+\mathrm{e}^x} = +\infty$

7. Calcolare
$$\int_0^\pi (1-t)\sin(t)\,dt$$
$$\textbf{Risp.} \qquad \int_0^\pi (1-t)\sin(t)\,dt = (t-1)\cos(t) - \sin(t)\Big|_0^\pi = 2 - \pi$$

oppure determinare una primitiva di

$$\frac{2x^2+3}{x^2-4}.$$

$$\textbf{Risp.}\quad 2x+\frac{11}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$$

8. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2+x+1)}$ nel punto $(0, \mathrm{e})$.

   Risp. $y = \mathrm{e}\, x + \mathrm{e}$

9. Risolvere $\begin{cases} x'' + 3x' - 4x = 0 \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 1 \end{cases}$ oppure trovare tutte le soluzioni di $x'' + 3x' - 4x = t^2$

   Risp. $x(t) = \mathrm{e}^t$ $\qquad x(t) = A\,\mathrm{e}^t + B\,\mathrm{e}^{-4t} + \frac{1}{12}\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{10}\,\mathrm{e}^t$

10. Dire se è continua ovunque la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x^2)}{2x^2} & \text{se } x < 0 \\ x^2 + \frac{1}{2} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

   Risp. No, la funzione non è continua in 0 perchè $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \neq f(0) = 1/2$.

11. Sia f una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$. Calcolare

$$\frac{d}{dx}\int_x^2 f(t)\,dt.$$

   Calcolare inoltre

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\sin(x)} f(t)\,dt.$$

   (Sugg. Chiamata F una primitiva di f, allora $\int \ldots$)

$$\textbf{Risp.}\quad \frac{d}{dx}\int_x^2 f(t)\,dt = -\frac{d}{dx}\int_2^x f(t)\,dt = -f(x).$$

Nel secondo caso, se F è una primitiva di f allora

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\sin(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}[F(\sin(x)) - F(0)] = F'(\sin(x))\cos(x) = f(\sin(x))\cos(x).$$

Tempo 40 minuti. Consegnare uno svolgimento completo degli esercizi.

1. Calcolare la parte reale di

$$\frac{1}{3+2i} - \frac{1}{3-2i}.$$

   Risp. $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{3+2i} - \frac{1}{3-2i}\right) = 0.$

2. Determinare una coppia di valori $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tale che i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ siano linearmente indipendenti

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Risp. Se $\mu \neq 0$ allora i vettori sono linearmente indipendenti, qualsiasi valore assuma λ.

3. Determinare se l'applicazione $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definita da

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{xy} \\ y + 2x \end{pmatrix},$$

sia lineare o no.

Risp. No, non è lineare. In particolare

$$A \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda^2 xy} \\ \lambda y + 2\lambda x \end{pmatrix} \neq \lambda A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^{xy} \\ \lambda(y + 2x) \end{pmatrix}$$

4. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare, se ciò è possibile, $A\,B$ e $B\,A$.

Risp. Si può calcolare solo $B\,A$ che risulta

$$B\,A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Siano $u = (1, 1)$ e $v = (1, 0)$. Esistono dei vettori $w \neq v$ tale che

$$< u, v > = < u, w > \qquad ?$$

Se si, descriverli geometricamente.

Risp. La condizione è soddisfatta se $< u, v - w >= 0$, cioè se il vettore $v - w$ è ortogonale a u. Ciò è verificato se

$$< u, v - w >= 1 \cdot (1 - w_1) + 1 \cdot (0 - w_2) = 1 - w_1 - w_2 = 0$$

e quindi per $w = (t, 1 - t)$, $t \in \mathbb{R}$. La soluzione quindi è data da una retta non passante per l'origine.

6. Determinare il nucleo e una base dell'immagine della applicazione lineare individuata dalla seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 9 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Risp. Tramite la riduzione a scala si trova che

$$\mathrm{Ker}(A) = \{(2t, -t, t) \qquad t \in \mathbb{R}\},$$

mentre

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$