

# Compito di Matematica

Pisa, 13 gennaio 2005

## Prima parte: Tempo 1 ora.

1. Calcolare il minimo di  $f(x) = |x - 3/2|$  al variare di  $x$

1) in  $\mathbb{N}$      2) in  $\mathbb{Q}$      3) in  $\mathbb{R}$

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{e^{x^2} - 1} \quad \boxed{1}.$$

3. Scrivere la derivata di  $\cosh(x^2)$ .

4. Dire se è derivabile ovunque la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \arctan(x) & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad \boxed{\text{No, non è derivabile in } 0}$$

5. Determinare l'immagine della funzione

$$2e^{-|x^2-1|}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \boxed{]0, 2]}.$$

6. Determinare una primitiva di

$$\frac{x-1}{x^3+x} \quad \boxed{\arctan(x) - \log|x| + \frac{1}{2} \log(1+x^2)}$$

oppure di

$$\frac{x^2+1}{x^2+2} \cdot \boxed{x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}$$

7. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione  $f(x) = x^{3x}$  nel punto  $(1, 1)$ .

8. Determinare tutte le soluzioni di

$$x'' + 2x' + x = 0. \quad \boxed{x(t) = A e^t + B t e^t \quad A, B \in \mathbb{R}}$$

9. La funzione  $\sqrt{f(x)}$  è sicuramente non derivabile nei punti in cui  $f(x) = 0$ ?

**Tempo 30 minuti.**

1. Risolvere in  $\mathbb{C}$  l'equazione

$$\frac{z}{\bar{z}} = -i. \quad \boxed{z = c - ic \quad \forall c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

2. Completare ad una base di  $\mathbb{R}^3$  i seguenti vettori:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{Si può aggiungere per esempio } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

3. Dire se l'applicazione  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3 \end{pmatrix}$$

sia lineare o no. No, non è lineare.

4. Determinare tutte le soluzioni di

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ 1/3+t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}}$$

5. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare  $AB^T$  e  $BA^T$ .

$$\boxed{AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad BA^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

6. Dati

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad e \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

calcolare il coseno dell'angolo da essi formato.

$$\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$