

Compito di Matematica

Pisa, 13 gennaio 2005

Prima parte: Tempo 1 ora.

1. Calcolare il punto minimo di $f(x) = |x - 3/2|$ al variare di x

1) in \mathbb{N} 2) in \mathbb{Q} 3) in \mathbb{R}

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos(x)} \quad \boxed{2}.$$

3. Scrivere la derivata di $\sinh(x^2)$.

4. Dire se è derivabile ovunque la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ \arctan(x) & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad \boxed{\text{sì, è derivabile su tutto } \mathbb{R}}$$

5. Determinare l'immagine della funzione

$$e^{-|x^2-4|}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \boxed{]0,1]}$$

6. Determinare una primitiva di

$$\frac{x+1}{x^3+x} \quad \boxed{\arctan(x) + \log|x| - \frac{1}{2} \log(1+x^2)}$$

oppure di

$$\frac{x^2-1}{x^2+2}. \quad \boxed{x - \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}$$

7. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^{2x}$ nel punto $(1, 1)$.

8. Determinare tutte le soluzioni di

$$x'' - 2x' + x = 0. \quad \boxed{x(t) = A e^{-t} + B t e^{-t} \quad A, B \in \mathbb{R}}$$

9. La funzione $\sqrt{f(x)}$ è sicuramente non derivabile nei punti in cui $f(x) = 0$?

Seconda parte: Tempo 30 minuti.

1. Risolvere in \mathbb{C} l'equazione

$$\frac{z}{\bar{z}} = i. \quad \boxed{z = c + ic \quad \forall c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

2. Completare ad una base di \mathbb{R}^3 i seguenti vettori:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{Si può aggiungere per esempio } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

3. Dire se l'applicazione $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sia lineare o no. No, non è lineare.

4. Determinare tutte le soluzioni di

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ 1/3 + t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}}$$

5. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Calcolare AB^T e BA^T .

$$\boxed{AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad BA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

6. Dati

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad e \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

calcolare il coseno dell'angolo da essi formato.

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$