

Compito di Matematica

Pisa, 9 giugno 2005

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Cognome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Nome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Numero di matricola)

Tempo 50 minuti. Consegnare uno svolgimento COMPLETO degli esercizi. Il solo risultato senza svolgimento equivale ad un esercizio non svolto.

1. Sia $A = \left\{ \frac{n}{\log(n)}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\} \right\}$. Determinare inf, sup e, se esistono, massimo e minimo di A .

2. Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x^2}$$

3. Scrivere la derivata di $[\sin(x^2)]^x$.

4. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{se } x < 1 \\ x^2 - x + 2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

È derivabile ovunque? È continua ovunque?

5. Determinare l'immagine della funzione

$$\frac{x^2}{1 + |x|}$$

6. Calcolare

$$\int_0^{\pi/2} (x^2 - 1) \sin(x) dx$$

oppure determinare una primitiva di

$$\frac{2t^2 + 1}{t^2 - 9}$$

7. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \sin(x)/x$ nel punto $(\pi, 0)$.

8.

$$\text{Risolvere } \begin{cases} x'' - 4x' + 3x = 0 \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \text{trovare tutte le soluzioni di} \\ x'' - 4x' + 3x = \sinh(t) \end{cases}$$

9. Sia f una funzione derivabile due volte tale che $f''(x) \geq 0$ e $f'(1) = 5$. Dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Tempo 30 minuti.

1. Risolvere l'equazione

$$z^2 + 2iz + 3 = 0.$$

2. Completare ad una base di \mathbb{R}^4 i seguenti vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Determinare se l'applicazione $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definita da

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2x+3)(3y-1) \\ 0 \end{pmatrix},$$

sia lineare o no.

4. Determinare tutte le soluzioni di

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & -10 \\ 4 & -8 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

5. Siano $u = (2, 2\sqrt{3})$ e $v = (0, 6)$. Determinare il valore (in radianti) dell'angolo compreso tra u e v .