Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Compito di Matematica

Pisa, 31 gennaio 2005

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Tempo 1 ora. Consegnare uno svolgimento completo degli esercizi.

1. Sia $A = \{-\sqrt{2}\} \cup]0,1]$. Determinare inf, sup e, se esistono, massimo e minimo di A e di $A \cap \mathbb{Q}$.

2. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x \to 0^+} \arctan(\log(x)).$$

3. Scrivere la derivata di $x^{(x^3)}$.

4. Dire se è derivabile ovunque la funzione
$$f(x) = |x|^{9/7}$$

5. Determinare l'immagine della funzione
$$\frac{1}{|1-x^2|}.$$

6. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log\left(\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$

7. Calcolare
$$\int_0^2 (t-1)\mathrm{e}^{-t}\,dt$$
oppure determinare una primitiva di
$$\frac{x^2}{x^2+x-1}.$$

8. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \log(x^2-3)$ nel punto $(2,0)$.

9. Risolvere $\begin{cases} x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 0 \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 1 \end{cases}$ oppure trovare tutte le soluzioni di $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = \mathrm{e}^t$

10. Dire se è continua ovunque la funzione
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x^2} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

11. Le funzioni f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono entrambe monotone decrescenti e derivabili su tutta la retta reale. Si può dire qualcosa sulla crescenza o decrescenza di $f \circ g$? Facoltativo: non usare la derivabilità.

Tempo 40 minuti. Consegnare uno svolgimento completo degli esercizi.

1. Calcolare la parte reale di
$$\left(\frac{1-i}{i}\right)^2.$$
2. Verificare se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 10 \\ 100 \end{pmatrix}.$$
ed eventualmente completarli ad una base di $\mathbb{R}^4$.
3. Determinare se l'applicazione $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definita da
$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+3x \\ 2y-x \end{pmatrix},$$
sia lineare o no.
4. Sì, si tratta di una applicazione lineare visto che con verifica immediata si può mostrare che $A(\lambda v) = \lambda A(v)$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\, v \in \mathbb{R}^2$ e anche $A(v+w) = A(v) + A(w)$, $\forall\, v, w \in \mathbb{R}^2$.
5. Siano
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$
Determinare, se esistono, tutte le soluzioni del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
6. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$
Calcolare, se ciò è possibile, $A\,A^T$ e $A^T A$.
7. Dato $v = (1, 2)$ determinare l'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^2$ ortogonali a v e descriverlo geometricamente.
8. Determinare il nucleo della applicazione lineare individuata dalla seguente matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$