Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Compito di Matematica

Pisa, 31 gennaio 2005

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Tempo 1 ora. Consegnare uno svolgimento completo degli esercizi.

1. Sia $A = [0, 1[\cup \{\pi\}$. Determinare inf, sup e, se esistono, massimo e minimo di A e di $A \cap \mathbb{Q}$.
2. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x \to 0^+} 2^{\log(\tan(x))}.$$
3. Scrivere la derivata di $x^{(x^2)}$.
4. Dire se è derivabile ovunque la funzione
$$f(x) = |x|^{5/4}$$
5. Determinare l'immagine della funzione
$$\frac{1}{1 + \sqrt{|x|}}.$$
6. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$
7. Calcolare
$$\int_0^2 (t+1)\mathrm{e}^{-t}\, dt$$
oppure determinare una primitiva di
$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 + x - 1}.$$
8. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \cos(x^2)$ nel punto $(\sqrt{\pi}/2, \sqrt{2}/2)$.
9. Risolvere $\begin{cases} 9x''(t) - 6x'(t) + x(t) = 0 \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 1 \end{cases}$ oppure trovare tutte le soluzioni di $9x''(t) - 6x'(t) + x(t) = t$
10. Dire se è continua ovunque la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^2)}{2x^2} & \text{se } x < 0 \\ x + \frac{1}{2} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

11. Le funzioni f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono entrambe monotone decrescenti e derivabili su tutta la retta reale. Si può dire qualcosa sulla crescenza o decrescenza di $f \circ g$? Facoltativo: non usare la derivabilità.

Tempo 40 minuti. Consegnare uno svolgimento completo degli esercizi.

1. Calcolare la parte reale di
$$\left(\frac{1+i}{i}\right)^2.$$

2. Verificare se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
ed eventualmente completarli ad una base di $\mathbb{R}^4$.

3. Determinare se l'applicazione $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definita da
$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - x \\ y + 2x \end{pmatrix},$$
sia lineare o no.

4. Siano
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$
Determinare, se esistono, tutte le soluzioni del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

5. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
Calcolare, se ciò è possibile, $A\,A^T$ e $A^T A$.

6. Dato $v = (2, 1)$ determinare l'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^2$ ortogonali a v e descriverlo geometricamente.

7. Determinare il nucleo della applicazione lineare individuata dalla seguente matrice
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$