Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Compito di Matematica

Pisa, 17 febbraio 2005

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Tempo 1 ora. Consegnare uno svolgimento completo degli esercizi.

1. Sia $A = \left\{1 - 1/n, \quad n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\right\}$. Determinare inf, sup e, se esistono, massimo e minimo di A.

2. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2)}{x^3}$$

3. Scrivere la derivata di $x^{\arctan(x)}$.

4. Dire se è derivabile ovunque la funzione
$$f(x) = \cos(|x|)$$

5. Determinare l'immagine della funzione
$$\frac{-x}{1+|x|}.$$

6. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + e^x}{x + e^{x^2}}.$$

7. Calcolare
$$\int_0^{\pi} (1+t)\sin(t)\,dt$$
oppure determinare una primitiva di
$$\frac{2x^2+3}{x^2+4}.$$

8. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \log\left(x^2 + x + 1\right)$ nel punto $(0,0)$.

9. Risolvere $\begin{cases} x'' + 3x' - 4x = 0 \\ x(0) = 2, \quad x'(0) = 2 \end{cases}$ oppure trovare tutte le soluzioni di $x'' + 3x' - 4x = \cosh(t)$

10. Dire se è continua la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \log(\cos(x^2)) & \text{se } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

11. Sia f una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$. Calcolare

$$\frac{d}{dx}\int_x^2 f(t)\,dt.$$

Calcolare inoltre

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\sin(x)} f(t)\,dt.$$

(Sugg. Chiamata F una primitiva di f, allora $\int \ldots$)

Tempo 40 minuti. Consegnare uno svolgimento completo degli esercizi.

1. Calcolare la parte reale di

$$\frac{1}{3+2i}+\frac{1}{3-2i}.$$

2. Determinare una coppia di valori $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tale che i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ siano linearmente indipendenti

$$v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3. Determinare se l'applicazione $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definita da

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(xy) \\ y+2x \end{pmatrix},$$

sia lineare o no.

4. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare, se ciò è possibile, $A\,B$ e $B\,A$.

5. Siano $u = (1,1)$ e $v = (1,0)$. Esistono dei vettori $w \neq v$ tale che

$$< u, v > = < u, w > \qquad ?$$

Se si, descriverli geometricamente.

6. Determinare il nucleo e una base dell'immagine della applicazione lineare individuata dalla seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$