Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Compito di Matematica

Pisa, 17 febbraio 2005

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Tempo 1 ora. Consegnare uno svolgimento completo degli esercizi.

1. Sia $A = \left\{1 + 1/n, \quad n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\right\}$. Determinare inf, sup e, se esistono, massimo e minimo di A.
2. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\log(x^3)}$$
3. Scrivere la derivata di $[\arctan(x)]^x$.
4. Dire se è derivabile ovunque la funzione
$$f(x) = \sin(|x|)$$
5. Determinare l'immagine della funzione
$$\frac{x}{1+|x|}.$$
6. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + e^{x^2}}{x^2 + e^x}.$$
7. Calcolare
$$\int_0^\pi (1-t)\sin(t)\,dt$$
oppure determinare una primitiva di
$$\frac{2x^2+3}{x^2-4}.$$
8. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = e^{(x^2+x+1)}$ nel punto $(0, e)$.
9. Risolvere $\begin{cases} x'' + 3x' - 4x = 0 \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 1 \end{cases}$ oppure trovare tutte le soluzioni di $x'' + 3x' - 4x = \sinh(t)$
10. Dire se è continua ovunque la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x^2)}{2x^2} & \text{se } x < 0 \\ x^2 + \frac{1}{2} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

11. Sia f una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$. Calcolare
$$\frac{d}{dx}\int_x^2 f(t)\,dt.$$
Calcolare inoltre
$$\frac{d}{dx}\int_0^{\sin(x)} f(t)\,dt.$$
(Sugg. Chiamata F una primitiva di f, allora $\int \dots$)

Tempo 40 minuti. Consegnare uno svolgimento completo degli esercizi.

1. Calcolare la parte reale di
$$\frac{1}{3+2i}-\frac{1}{3-2i}.$$

2. Determinare una coppia di valori $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tale che i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ siano linearmente indipendenti
$$v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\5\\6\end{pmatrix}\qquad v_2=\begin{pmatrix}\lambda\\0\\\mu\\0\end{pmatrix}\qquad v_3=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\1\end{pmatrix}.$$

3. Determinare se l'applicazione $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, definita da
$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{xy}\\y+2x\end{pmatrix},$$
sia lineare o no.

4. Siano
$$A=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\qquad \text{e} \qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\3&0\end{pmatrix}.$$
Calcolare, se ciò è possibile, $A\,B$ e $B\,A$.

5. Siano $u=(1,1)$ e $v=(1,0)$. Esistono dei vettori $w\neq v$ tale che
$$<u,v>=<u,w> \qquad ?$$
Se si, descriverli geometricamente.

6. Determinare il nucleo e una base dell'immagine della applicazione lineare individuata dalla seguente matrice
$$\begin{pmatrix}1&6&4\\2&9&5\\3&5&-1\end{pmatrix}.$$