

Programma di ANALISI MATEMATICA I (Ing. Informatica): A.A. 2023/24

Ing. Informatica

Richiami sulla nozione di insieme e funzioni iniettive, surgettive e bigettive. Equipotenza di insiemi. Richiami sulle funzioni trigonometriche inverse. Definizione e prime proprietà di alcuni insiemi di numeri (\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q}) Brevi cenni alla costruzione dei numeri reali (\mathbb{R}) tramite il loro sviluppo decimale.

Definizione (ed esempi) di: funzione, dominio, codominio, immagine e grafico. Funzioni iniettive, suriettive e biiettive. Funzione inversa. Corrispondenze biiettive tra insiemi finiti, concetto di cardinalità e insiemi equipotenti. Alcuni esempi di corrispondenze biiettive tra insiemi infiniti e loro sottoinsiemi propri.

Il principio di induzione e applicazioni. I coefficienti binomiali e la formula del binomio* (triangolo di Pascal-Tartaglia). Estremo superiore e inferiore. Esistenza* dell'estremo superiore e inferiore per sottoinsiemi reali limitati e non vuoti. Differenze e analogie tra massimo ed estremo superiore (e tra minimo e "inf"). Prime applicazioni e calcolo dell'estremo superiore e inferiore per insiemi reali elementari. Massimo, minimo, punto di massimo e punto di minimo per funzioni reali.

Definizione di successione reale. Massimo, minimo, estremo superiore ed inferiore di una successione. Limite di una successione ed eventuali relazioni tra limitatezza ed esistenza del limite. Forme indeterminate elementari (prodotto di successione infinitesima per limitata e di successione divergente a $+\infty$ e limitata). Alcuni esempi di forme indeterminate di tipo $0/0$, ∞/∞ e $+\infty - \infty$. Ordini di infinito. Teoremi sulla convergenza delle successioni monotone.

Il numero "e" come limite di successione. Il numero π come limite di successione. Teorema della permanenza del segno e teorema sulla limitatezza di successioni convergenti. Teorema del confronto e teoremi su somma, prodotto e rapporto* di successioni. Limiti notevoli* e applicazioni al calcolo di alcuni limiti.

Massimo, minimo, estremo superiore ed inferiore di funzioni reali su insiemi. Funzione continua in un punto: definizione ed esempi. Teorema di Weierstrass*: esempi, controesempi e conseguenze. Teorema sulla somma, prodotto, rapporto* e composizione* di funzioni continue. Legame tra convergenza di successioni e funzioni continue. Teorema della permanenza del segno. Teoremi degli zeri e dei valori intermedi, e relative applicazioni. Studio della continuità per funzioni definite a tratti. Relazione tra continuità, monotonia e invertibilità per funzioni definite su intervalli.

Definizione del campo dei numeri complessi come coppie ordinate di numeri reali con le operazioni di somma e prodotto. Parte reale, parte immaginaria e coniugato di un numero complesso. Rappresentazione algebrica e trigonometrica dei numeri complessi e conversione fra le due. Interpretazione geometrica delle operazioni algebriche. Equazioni e disequazioni elementari nel campo complesso. Potenza e radice n -esima di un numero complesso. Cenni alla soluzione delle equazioni algebriche di terzo grado e cenni al logaritmo di numero complesso. Definizione di limite finito per funzioni reali definite su intervalli "bucati", cioè limite per $x \rightarrow x_0$ per funzioni definite su di un intervallo $]a, b[$, eccetto al più il punto $x_0 \in]a, b[$. Definizione e primi esempi di esistenza e non esistenza del limite. Teorema di unicità del limite. Teorema sulla somma, sul prodotto e sul rapporto* dei limiti. Teorema della permanenza del segno e teorema del confronto o "dei due carabinieri". Uso di questi teoremi per il calcolo dei limiti notevoli. Limiti infiniti. Limite destro e sinistro (anche negli estremi dell'intervallo di definizione). Calcolo di alcuni limiti notevoli (il numero "e"), risoluzione di alcune forme indeterminate del tipo $0/0$ e ∞/∞ .

Cambio di variabile nell'argomento della funzione*. Limiti all'infinito, primi esempi. La nozione di derivata: limite del rapporto incrementale. Continuità delle funzioni derivabili e controesempi. Regole per il calcolo della derivata di somma, prodotto, rapporto e composizione* di funzioni derivabili. Derivata della funzione inversa*. Definizione e calcolo della retta tangente. Derivate delle funzioni trigonometriche ed esponenziali e delle loro inverse. Derivata destra e sinistra e studio della derivabilità per funzioni definite a tratti. Teorema di Fermat. Teoremi di Rolle e Lagrange. Applicazioni e prime conseguenze. Applicazione allo studio della crescita e de-crescita e alla determinazione dei punti di massimo e di minimo interni e non-interni per funzioni derivabili. Regole di de L'Hôpital* per la risoluzione di alcune forme indeterminate.

Nozione di “o-grande” e di “o-piccolo”. Definizione e calcolo del polinomio di Taylor* (resto nella forma di Lagrange e in quella di Peano) e applicazione allo studio della convessità e della concavità su intervalli. Uso della derivata seconda (e successive) nello studio dei massimi e dei minimi e dei punti di flesso.

La nozione di integrabilità secondo Riemann nell'intervallo $[a, b]$. Proprietà elementari delle funzioni integrabili. Integrabilità delle funzioni continue* o al più discontinue in un numero finito di punti*. Teoremi della media integrale. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Calcolo degli integrali definiti e indefiniti di funzioni elementari. Cenni allo studio delle funzioni integrali e al calcolo di limiti relativi a funzioni integrali.

Integrazione per parti e per sostituzione* con esempi e applicazioni. Integrazione di alcune funzioni razionali* (senza radici complesse con molteplicità è maggiore di uno).

Integrali generalizzati: integrazione su intervalli non limitati e teoremi del confronto e del confronto asintotico. Integrabilità e integrabilità assoluta. Integrazione di funzioni non limitate nell'intorno di un punto e teoremi del confronto* e del confronto asintotico*.

Serie numeriche: definizione di serie convergente. Condizione necessaria per la convergenza sul termine n -esimo. Convergenza delle serie geometriche e della serie armonica e armonica generalizzata. Serie a termini non-negativi. Criteri del confronto e del confronto asintotico. Criterio di Leibniz per serie a segni alternati.

Serie di potenze. Definizione e calcolo* del Raggio di convergenza. Cenni alle serie a termini complessi (Esponenziale e formula di Eulero). Funzioni elementari sviluppate come Serie di potenze o di Taylor*: definizione e qualche esempio. Integrazione* e derivazione* termine a termine di serie convergenti.

Il problema di Cauchy per equazioni ordinarie e risultati* di esistenza e unicità. Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili. Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti del secondo ordine. Equazioni lineari non omogenee: soluzioni particolari con e senza risonanza (con forza esterna prodotto di polinomio, esponenziale e seno o coseno) con il metodo degli annihilatori. Equazioni lineari del primo ordine a coefficienti non costanti, cenno alla soluzione con il metodo del fattore integrante.

I teoremi o le formule con l'asterisco sono stati enunciati e spiegati, ma non ne è stata data la dimostrazione.

Aggiornato al 16 dicembre 2023