Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di autovalutazione di Analisi Matematica 1

11 Novembre 2022

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=979315

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=979315

PARTE A

1. Data f di classe C^1, allora la derivata di $f(3x)$ vale
   A: $f'(3x)$ B: $f(3x)f'(3x)$ C: N.E. D: $2f'(3x)$ E: N.A.
2. La somma $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{3^n}$ vale
   A: $4/3$ B: 1 C: N.A. D: $3/2$ E: $2/3$
3. Nel piano di Gauss su quante rette giacciono le soluzioni di $z^z = \|z\|^2$, con $z \in \mathbb{C}$
   A: N.A. B: 1 C: 2 D: 3 E: N.E.
4. Per quali valori di (α, β) la funzione $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \leq 1 \\ \alpha x + \beta & x > 1 \end{cases}$ risulta derivabile
   A: N.A. B: 3, $\beta \in \mathbb{R}$ C: $(-3, 2)$ D: $(3, 1)$ E: $(0, 0)$
5. La retta tangente alla funzione $f(x) = \sin(\sin(x))$ relativa al punto $x_0 = 0$ vale
   A: $x + 1$ B: $2x$ C: N.A. D: 0 E: $2x - 1$
6. Data $f(x) = (1 + x)^{\sin(x)}$ allore $f'(0)$ vale
   A: e B: 2 C: N.E. D: N.A. E: 1/e
7. Il limite $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(\log(x))}{\log(x)}$ vale
   A: N.E. B: $+\infty$ C: 0 D: 1 E: N.A.
8. Per quali valori di b la funzione $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x} - b & -1 < x \leq 0 \\ 1/\log(x) & 0 < x < 1 \end{cases}$ risulta continua
   A: -1 B: N.E. C: 1 D: N.A. E: 0
9. La quantità $\frac{d^4}{dx^4} \sin(x)\cos(x)$ per $x = \pi/4$ vale
   A: 2 B: 2^3 C: -2^3 D: N.A. E: 1
10. Il limite $\lim_{n \to +\infty} \frac{\log(n^3)+n^2}{n^2 \log(n)}$ vale
    A: $+\infty$ B: N.A. C: $-\infty$ D: 1 E: 0

CODICE=979315

CODICE=979315

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1					X
2					X
3		X			
4	X				
5			X		
6				X	
7			X		
8			X		
9		X			
10					X

CODICE=979315

CODICE=979315

PARTE B

1 Trovare, se esiste, le retta passante per l'origine e tangente al grafico di $\log(x)$.

Soluzione. Dobbiamo trovare una retta della forma $y = mx$ che intersechi il grafico del logaritmo in $(x_0, \log(x_0))$ e che sia anche tangente in quel punto, cioè tale che il coefficiente angolare sia $(\log(x))'_{x=x_0}$. Si ha quindi il sistema

$$y_0 = mx_0 = \log(x_0) \qquad m = (\log(x))'_{x=x_0} = 1/x_0,$$

che ha come soluzione $y_0 = 1$ e quindi $x_0 = \mathrm{e}$. Pertanto la retta cercata risulta $y = \mathrm{e}^{-1}x$.

2 Determinare il numero delle soluzioni reali di

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+1}} = \lambda \qquad \text{al variare di } \lambda \in \mathbb{R}$$

Soluzione. Dato che ogni radice è non-negativa, non ci sono soluzioni se $\lambda < 0$. Per capire quante soluzioni ci sono studiamo l'andamento di f. Intanto il suo dominio sono le $x \in \mathbb{R}$ tali che $\frac{x^3}{x+1} \geq 0$ e $x \neq -1$ e quindi

$$D =]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[.$$

Si vede facilmente che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f = \lim_{x\to -1^-} f = +\infty$$

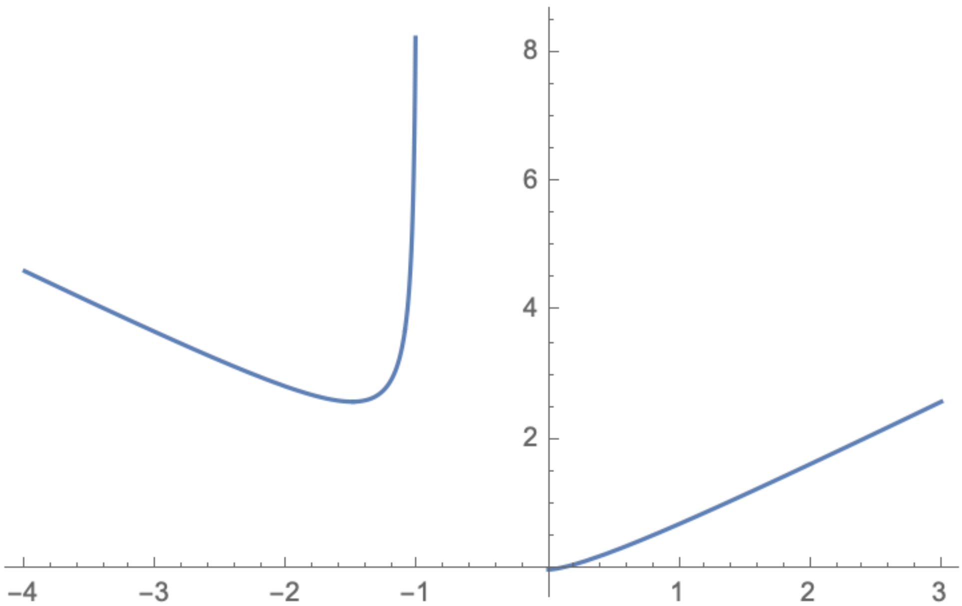
e dato che $f(0) = 0$ tutti i valori positivi vengono assunti almeno una volta su entrambe le semirette che compongono il dominio.

Calcolando la derivata prima $f'(x) = \frac{x^2(2x+3)}{2\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}(x+1)^2}$ si ha che il segno dipende solo dal termine $2x+3$ e quindi si ha

$$f'(x) \geq 0 \text{ per } x \in]-3/2, -1[\cup [0, +\infty[,$$

e la funzione risulta decrescente per $x < -3/2$ e crescente negli altri intervalli. In $x = -3/2$ si ha un punto di minimo relativo e $f(-3/2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Questo è sufficiente per tracciare il grafico che risulta



CODICE=979315

e concludere pertanto che ci sono 3 soluzioni per $\lambda > \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 2 soluzioni per $\lambda = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, e 1 sola soluzione per $0 \leq \lambda < \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

3 Calcolare $\frac{d^n}{dx^n}(x+1)\mathrm{e}^{-x}$ al variare di $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione. Calcolando le prime derivate si osserva che la derivata risulta sempre del tipo "polinomio di primo grado per e^{-x}" con il coefficiente della x che vale alternativamente ± 1, mentre il termine di grado zero risulta uguale a (piu o meno) il grado di derivazione meno 1. Si congettura quindi che la formula sia

$$\frac{d^n}{dx^n}(x+1)\mathrm{e}^{-x} = (-1)^n(x-n+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

Per $n = 1$ tale formula risulta corretta. Supponiamola corretta per un certo $N \in \mathbb{N}$ e vediamo se la formula risulta corretta anche al passo successivo. Derivando $(-1)^N(x-N+1)\mathrm{e}^{-x}$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{d^{N+1}}{dx^{N+1}}(-1)^N(x-N+1)\mathrm{e}^{-x} &= (-1)^N\mathrm{e}^{-x} - (-1)^N(x-N+1)\mathrm{e}^{-x} \\
&= -(-1)^{N+1}\mathrm{e}^{-x} + (-1)^{N+1}(x-N+1)\mathrm{e}^{-x} \\
&= (-1)^{N+1}(x-N+1-1)\mathrm{e}^{-x} \\
&= (-1)^{N+1}(x-(N+1)+1)\mathrm{e}^{-x}.
\end{aligned}$$

concludendo così la dimostrazione per induzione.

CODICE=979315