Cenni alla soluzione delle equazioni (algebriche) di terzo grado

20 ottobre 2020

Data il polinomio cubico della forma $z^3 + az^2 + bz + c$ e effettuando la sostituzione $z = x - a/3$ si ottiene, svolgendo i calcoli,

$$
\begin{aligned}
&z^3 + az^2 + bz + c \\
&= (x - a/3)^3 + a(x - a/3)^2 + b(x - a/3) + c \\
&= x^3 - ax^2 + \frac{1}{3}a^2x - \frac{a^3}{27} + ax^2 - \frac{2a^2x}{3} + \frac{a^3}{9} + bx - \frac{ab}{3} + c \\
&= x^3 + \big(b - \frac{a^2}{3}\big)x + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \\
&= x^3 + b'x + c'
\end{aligned}
$$

se $b' = b - \frac{a^2}{3}$ e $c' = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$.

Tale polinomio si chiama cubica *depressa* (del fattore di secondo grado). Dato che questo cambio di variabile si può sempre effettuare si considerano cubiche depresse per il motivo che per loro è più facile trovare una radice (reale?).

Ricordiamo che un polinomio di grado 3 ha esattamente 3 radici (con eventuale molteplicità più grande di uno) e che se i coefficienti sono reali le radici sono complesse e coniugate. Inoltre ogni polinomio di grado dispari ha almeno una radice reale.

Si ha la seguente formula (nota come formula di Cardano) che verrà derivata seguendo un metodo descritto da Eulero attorno al 1770.

Teorema. Una soluzione dell'equazione cubica depressa $x^3 = mx + n$ è data da

$$x = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}}}.$$

Dimostrazione. Cerchiamo una soluzione della forma $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$ per qualche $p, q, \in \mathbf{R}$ (o anche in $\mathbf{C}$). Elevando al cubo si ha

$$x^3 = p^3 + 3\sqrt[3]{p^2q} + 3\sqrt[3]{pq^2} + q = 3\sqrt[3]{pq}\,x + (p + q),$$

e questo suggerisce di porre

$$\begin{cases} 3\sqrt[3]{pq} = m, \\ p + q = n. \end{cases}$$

Elevando al cubo la prima equazione e dividendola per 27/4 e elevando al quadrato la seconda si ottiene

$$\begin{cases} 4pq = \dfrac{4m^3}{27} \\ p^2 + 2pq + q^2 = n^2. \end{cases}$$

Sottraendo dalla seconda equazione la prima si ha

$$p^2 + 2pq + q^2 - 4pq = (p-q)^2 = n^2 - \frac{4m^3}{27},$$

e quindi

$$\begin{cases} p - q = \sqrt{n^2 - \dfrac{4m^3}{27}} \\ p + q = n, \end{cases}$$

da cui la formula risolvendo il sistema lineare nelle due incognite p e q. $\square$

Nel ricavare la formula c'è una voluta ambiguità sul significato delle radici quadrate e cubiche e Eulero porta questo esempio.

$$x^3 = 6x + 4 \qquad \text{cioè: } m = 6 \text{ e } n = 4.$$

Applicando la formula risolutiva ottenuta prima si ha

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{216}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{216}{27}}} \\ &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{4-8}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4-8}} \\ &= \sqrt[3]{2+2i} + \sqrt[3]{2-2i}. \end{aligned}$$

Osservando che $(-1+i)^3 = 2+2i$ si ha che sicuramente $-1+i$ è una delle radici cubiche di $2+2i$ e dunque

$$\sqrt[3]{2+2i} = \left\{-1+i,\, (-1+i)\omega_3,\, (-1+i)\omega_3^2\right\}$$

dove ω_3 è la radice cubica di 1 data da

$$\omega_3 = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

Infatti $|\omega_3| = 1$ e $\arg(\omega_3) = 2\pi/3$. Pertanto svolgendo i calcoli

$$\sqrt[3]{2+2i} = \left\{-1+i,\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right\}$$

e allo stesso modo

$$\sqrt[3]{2-2i} = \left\{ -1-i,\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2} \right\}$$

e quindi sommando termine a termine si ha che

$$\sqrt[3]{2+2i} + \sqrt[3]{2-2i} = \left\{ -2, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3} \right\}.$$

Si verifica che tutte e tre le radici sono reali e quindi l'equazione cubica depressa di partenza ha tre radici reali, nonostante la formula contenga numeri complessi con parte immaginaria non nulla. Le quantità immaginarie si cancellano e da qui viene (storicamente) il nome immaginario, come se quello fosse stato solo un artificio per poter svolgere i calcoli.