Una stima di π, tramite sviluppi in serie, dovuta a Eulero

16 dicembre 2018

Il calcolo approssimato di π tramite lo sviluppo dell'arcotangente

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$

ponendo $x = 1$ e ottenendo una serie a segni alterni è dovuto a Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

La convergenza è lentissima e il risultato non è di nessun utilizzo pratico: in una serie a segno alterno, il resto relativo alla somma dei termini per $n = 0, \dots, M-1$ risulta essere stimabile (verificarlo) con il valore assoluto del primo termine non sommato, cioè

$$\frac{1}{2M+1}.$$

Una maniera più efficiente di usare lo svilppo dell'arcotangente può essere quella di valutare la serie non in $x = 1$, ma per un numero più vicino a zero, in modo da diminuire il resto. Per esempio per $x = 3^{-1/2}$ si ottiene

$$\frac{\pi}{6} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}\cdot 3} + \frac{1}{9\sqrt{3}\cdot 5} - \frac{1}{27\sqrt{3}\cdot 7} + \dots$$

e in questo modo si vede che la somma con $n = 0, 1, \dots, M-1$ diferisce dal valore di $\frac{\pi}{6}$ meno di

$$\frac{1}{2M+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2M+1} << \frac{1}{2M+1}.$$

L'osservazione di Eulero è quindi quella di derivare la seguente formula

$$\pi = 20\arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 8\arctan\left(\frac{3}{79}\right), \tag{1}$$

che richiede di valutare l'arcotangente in numeri vicini a zero e che rendono quindi l'errore molto piccolo.

Infatti, sommando solo 6 termini si ottiene

$$\begin{aligned}
&20\left[1/7 - \frac{(1/7)^3}{3} + \frac{(1/7)^5}{5} - \frac{(1/7)^7}{7} + \frac{(1/7)^9}{9} + \frac{(1/7)^{11}}{11}\right] \\
&\quad + 8\left[3/79 - \frac{(3/79)^3}{3} + \frac{(3/79)^5}{5} - \frac{(3/79)^7}{7} + \frac{(3/79)^9}{9} + \frac{(3/79)^{11}}{11}\right] \sim 3.1415926535741905207
\end{aligned}$$

che confrontato con lo sviluppo di $\pi = 3.1415926535897932385\ldots$ e ne fornisce le prime 11 cifre decimali esatte.

La maniera con cui si arriva alla (1), che non è una approssimazione ma una formula esatta, passa attraverso l'uso della formula per la tangente della differenza di due angoli

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)},$$

scritta nella forma

$$\alpha - \beta = \arctan\left[\frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}\right].$$

Se poniamo $\tan(\alpha) = \frac{x}{y}$ e $\tan(\beta) = \frac{z}{w}$ otteniamo

$$\arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \arctan\left(\frac{z}{w}\right) + \arctan\left(\frac{xw - yz}{yw + xz}\right). \tag{2}$$

Eulero inizia scegliendo $x = y = z = 1$ e $w = 2$ e ottenendo da (2)

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right).$$

Il passo successivo consiste nel trovare x, y, z, w in modo da esprimere $\arctan(1/2)$ in termini di angoli più piccoli.

Scegliendo $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$ e $w = 7$ si ha infatti, ancora dalla (2)

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + \arctan\left(\frac{5}{15}\right) = \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

e, sostituendo nell'espressione per $\frac{\pi}{4}$ calcolata precedentemente, si ottiene

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right).$$

Scegliendo poi $x = 1$, $y = 3$, $z = 1$ e $w = 7$ si ha da (2)

$$\arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + \arctan\left(\frac{2}{11}\right),$$

da cui otteniamo

$$\frac{\pi}{4} = 3\arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2\arctan\left(\frac{2}{11}\right).$$

Infine, scegliendo $x = 2$, $y = 11$, $z = 1$ e $w = 7$ si ha, sempre da (2),

$$\arctan\left(\frac{2}{11}\right) = \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + \arctan\left(\frac{3}{79}\right),$$

e sostituendo nell'espressione precedente per $\frac{\pi}{4}$ si ottiene

$$\frac{\pi}{4} = 5\arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2\arctan\left(\frac{3}{39}\right),$$

la formula usata da Eulero.