Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

19 dicembre 2014

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=781841

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 781841

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○

PARTE A

1. L'insieme degli $\alpha, \beta > 0$ tali che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha + n^\beta} < +\infty$$

e costituito da

A: $\alpha + \beta > 1$ B: $\alpha + \beta > 2$ C: α e β maggiori di uno D: N.A. E: α o β maggiori di uno

2. Il polinomio di Taylor di grado 4 in $x_0 = \pi$ della funzione $\cos(x)$ vale

A: $1 - x^2/2! + x^4/4!$ B: $1 - x + x^2/2 - x^3/3 + x^4/4$ C: $-1 + (x - \pi/2)^2/2$ D: N.A. E: $1 + \frac{1}{2}(x-\pi)^2 - \frac{1}{24}(x-\pi)^4$

3. L'integrale

$$\int_{-2}^{2} |x^3| \, dx$$

vale

A: N.A. B: 1/4 C: 2/3 D: 0 E: 8

4. Il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x \log|x|}{\log^2 |\log|x||}$$

vale

A: N.E. B: 0 C: 1/2 D: N.A. E: $+\infty$

5. Data $f(x) = \arcsin(\sqrt{x+1})$, allora $f'(-1/2)$ vale

A: 0 B: -1 C: N.A. D: 1/2 E: 1

6. Sia y la soluzione di $y''(x) + y(x) = 0$ con $y(0) = \pi/2$, $y'(0) = 0$ allora $y''(0)$ vale

A: N.A. B: $1 + \pi$ C: 1 D: $\sin(0)$ E: $-\pi/2$

7. L'integrale

$$\int_{1/3}^{1} \frac{x^2}{x^2+1} \, dx$$

vale

A: 1 B: 0 C: $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \arctan(1)$ D: N.A. E: $\frac{2}{3} - \frac{\pi}{4} + \arctan(\frac{1}{3})$

8. Sia $z = i$ allora la parte reale di $(z^3 \overline{z})^2$ vale

A: 2 B: N.A. C: 0 D: -1 E: 1

CODICE=781841

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 781841

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	○	●	○
3	○	○	○	○	●
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	○	●
6	○	○	○	○	●
7	○	○	○	○	●
8	○	○	○	○	●

CODICE=781841

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

19 dicembre 2014

1. Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \log(\lambda \log(x)) \qquad \lambda \in [-1, 1]$$

Soluzione. Per poter definire la funzione è intanto necessario restringersi a $x > 0$ per poter definire $\log(x)$. Inoltre è necessario anche che $\lambda \log(x) > 0$, pertanto dobbiamo studiare i seguenti casi

$$x > 1 \leftrightarrow \log(x) > 0 \quad \text{con } \lambda \in]0, 1]$$

$$0 < x < 1 \leftrightarrow \log(x) < 0 \quad \text{con } \lambda \in [-1, 0[.$$

Nel primo caso abbiamo per ogni $\lambda \in]0, 1]$ come limiti agli estremi

$$\lim_{x \to 1^+} \log(\lambda \log(x)) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \log(\lambda \log(x)) = +\infty.$$

Poi risulta $f'(x) = \frac{1}{x \log(x)} > 0$ e $f''(x) = -\frac{1+\log(x)}{x^2 (\log(x))^2} < 0$. Il grafico qualitativo è quindi

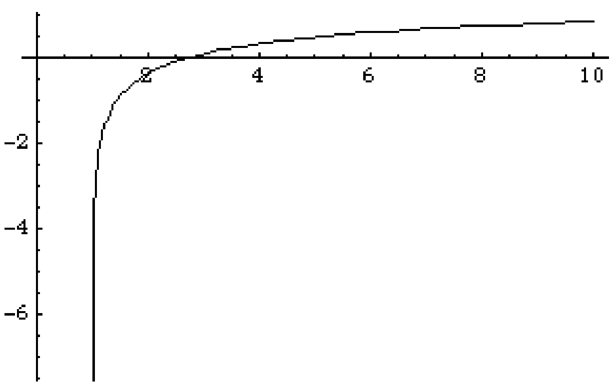

Figura 1: Il caso $0 < \lambda \leq 1$

CODICE=781841

e l'intersesione con l'asse delle x si ha per $x = \mathrm{e}^{1/\lambda}$.

Nel secondo caso abbiamo per ogni $\lambda \in [-1, 0[$ come limiti agli estremi

$$\lim_{x \to -1^+} \log(\lambda \log(x)) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \log(\lambda \log(x)) = -\infty.$$

Poi risulta $f'(x) = \frac{1}{x \log(x)} < 0$ e $f''(x) = -\frac{1+\log(x)}{x^2(\log(x))^2}$, quindi $f'' > 0$ per $0 < x < 1/\mathrm{e}$ Il grafico qualitativo è quindi e l'intersesione con l'asse delle x si ha ancora per $x = \mathrm{e}^{1/\lambda}$.

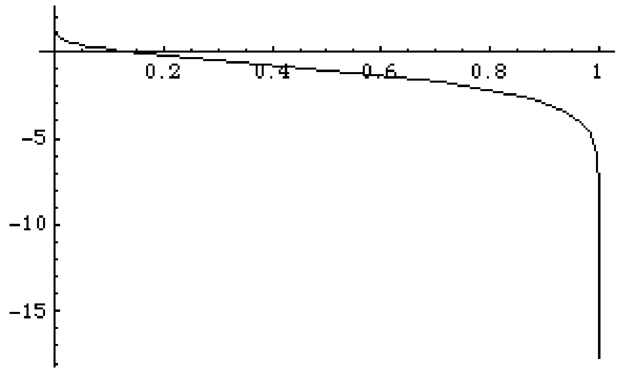

Figura 2: Il caso $-1 \leq \lambda < 0$

2. Studiare la convergenza e calcolare eventualmente l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\tau}{\tau^2 + x^2}\, dx$$

al variare del parametro $\tau \in \mathbb{R}$.

Soluzione. La funzione $f_\tau(x) = \frac{\tau}{\tau^2+x^2}$ è continua e limitata per ogni $\tau \neq 0$. Nel caso di $\tau = 0$ vale zero dappertutto. L'integrale si può scrivere come

$$\int_0^{+\infty} \frac{\tau}{\tau^2 + x^2}\, dx = \int_0^{1} \frac{\tau}{\tau^2 + x^2}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\tau}{\tau^2 + x^2}\, dx$$

e il primo integrale $\int_0^1 \frac{\tau}{\tau^2+x^2}\, dx$ è finito perchè integrale su un intervallo chiuso e limitato di una funzione continua. Il secondo integrale si può stimare, per ogni $\tau \neq 0$ nel seguente modo

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{\tau}{\tau^2 + x^2}\, dx \right| \leq |\tau| \int_1^{+\infty} \frac{1}{\tau^2 + x^2}\, dx \leq |\tau| \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx < |\tau|,$$

quindi l'integrale è convergente. Possiamo anche calcolarlo esplicitamente

$$\int_0^{+\infty} \frac{\tau}{\tau^2 + x^2}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^{b} \frac{\tau}{\tau^2 + x^2}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \arctan\left(\frac{x}{\tau}\right)\Bigg|_0^b = \lim_{b \to +\infty} \arctan\left(\frac{b}{\tau}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Pertanto

$$\int_0^{+\infty} \frac{\tau}{\tau^2 + x^2}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } \tau = 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se } \tau \neq 0 \end{cases}$$

CODICE=781841

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + 3x^2 y(x) = e^{-x^3} x \log(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione. Si tratta di una equazione lineare a coefficienti non costanti e il fattore integrante è $e^{\int 3x^2\,dx} = e^{x^3}$. Moltiplicando entrambi i termini per il fattore integrante si ottiene

$$\big(y'(x) + 3x^2 y(x)\big)e^{x^3} = \frac{d}{dx}\big(y(x)e^{x^3}\big) = x\log(x)$$

e integrando per parti si ottiene facilmente che

$$\int x\log(x) = \frac{1}{2}x^2\log(x) - \frac{x^2}{4}.$$

Quindi si ha

$$y(x)e^{x^3} = \frac{1}{2}x^2\log(x) - \frac{x^2}{4} + c,$$

da cui

$$y(x) = e^{-x^3}\left(\frac{1}{2}x^2\log(x) - \frac{x^2}{4} + c\right).$$

Imponendo the $y(0) = 1$ si ottiene

$$1 = y(0) = \lim_{x\to 0} y(x) = \lim_{x\to 0} e^{-x^3}\left(\frac{1}{2}x^2\log(x) - \frac{x^2}{4} + c\right) = c,$$

da cui $c = 1$ e la soluzione risulta

$$y(x) = e^{-x^3}\left(\frac{1}{2}x^2\log(x) - \frac{x^2}{4} + 1\right).$$

4. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n (x-1)^{2n}.$$

Soluzione. La serie può essere scritta come una progressione geometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[3(x-1)^2\right]^n$$

e pertanto converge se

$$\left|3(x-1)^2\right| < 1,$$

cioè se $|x-1| < 1/\sqrt{3}$. Pertanto il raggio di convergenza è $R = 1/\sqrt{3}$ e la serie converge per $x \in]1 - 1/\sqrt{3}, 1 + 1/\sqrt{3}[$.

CODICE=781841