Note sulla approssimabilità dei numeri irrazionali tramite razionali.

13 dicembre 2013

Facciamo alcune brevi considerazioni relative alla approssimabilità di numeri irrazionali, tramite frazioni e in particolare consideriamo il numero $\sqrt{2}$. Sappiamo che non esistono $p, q \in \mathbb{N}$ tali che $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, ma "per tentativi" si possono calcolare cifre decimali arbitrarie di $\sqrt{2}$ usando la monotonia della funzione $x \mapsto x^2$, anche se è un procedimento molto poco efficace, dato che per ogni nuova cifra calcolata puó richiedere di fare 9 moltiplicazioni e confronti fra frazioni.

La questione può essere vista anche in questa ottica: dato il denominatore $q > 1$, qual'è la precisione massima con cui posso approssimare $\sqrt{2}$ con frazioni di denominatore q?

Quello che possiamo dire è che sicuramente esiste $p \in \mathbb{N}$, tale che $q < p < 2q$, che soddisfa

$$\frac{p}{q} < \sqrt{2} < \frac{p+1}{q}.$$

Il punto $\sqrt{2}$ quindi si trova o nella prima o nella seconda metà dell'intervallo $\mathcal{I} = \left[\frac{p}{q}, \frac{p+1}{q}\right]$ e quindi approssimandolo con $\sqrt{2} \sim \frac{p}{q}$ o con $\sqrt{2} \sim \frac{p+1}{q}$ ci dobbiamo aspettare che l'errore possa alla peggio essere dell'ordine di metà della lunghezza dell'intervallo $\mathcal{I}$.

Alla fine abbiamo quindi mostrato che dato $q \in N$, con la migliore scelta di $p \in \mathbb{N}$ possiamo avere una approssimazione del tipo

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \sim \frac{1}{2q}. \tag{1}$$

Vediamo ora che con una scelta opportuna di q (e quindi non per arbitrari denominatori) la stima può essere notevolmente migliorata. Definiamo pertanto gli $N + 1$ numeri $x_0, x_1, \ldots, x_N$ nel seguente modo

$$x_k = k\sqrt{2} \qquad k = 0, 1, \ldots, N$$

Possiamo scrivere quindi che

$$x_k = [x_k] + \{x_k\} = m_k + \alpha_k$$

con $m_k \in \mathbb{N}$ la parte intera, mentre $\alpha_k \in (0, 1)$ è la parte frazionaria. Siccome abbiamo gli α_i che sono $N + 1$ numeri tutti in $(0, 1)$, almeno 2 di loro distano meno di $1/N$ (questo è vero perchè disterebbero tutti $1/N$ dal più vicino solo se fossero equi-spaziati nell'intervallo chiuso $[0, 1]$).

Esistono pertanto $r, s \in \mathbb{N}$ con $r < s$ tali che

$$r\sqrt{2} = n + \alpha \qquad s\sqrt{2} = m + \beta,$$

con $n, m \in \mathbb{N}$ e

$$|\alpha - \beta| \leq \frac{1}{N}$$

Scriviamo ora questa relazione come

$$(s - r)\sqrt{2} = m - n + \beta - \alpha$$

e se definiamo

$$q = s - r \qquad p = m - n$$

otteniamo

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} + \frac{\beta - \alpha}{q}$$

quindi

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{|\beta - \alpha|}{q} \leq \frac{1}{q\,N}$$

ma $q = s - r < s \leq N$ quindi $1/N < 1/q$, quindi otteniamo

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}, \tag{2}$$

che per $q > 2$ è una stima sicuramente migliore della (1), con la differenza che la (1) vale per ogni q, mentre la (2) vale solo per certi q.

Viene naturale chiedere se con tecniche più raffinate si possa fare di meglio. Il seguente calcolo elementare mostra che esiste una stima anche dal basso non superabile per l'errore. Infatti per ogni coppia di numeri naturali p, q si ha che

$$p^2 \neq 2q^2$$

e quindi p^2 e $2q^2$ sono due interi differenti che devono differire almeno per una unità. Per fissare le idee supponiamo che $1 < \frac{p}{q} < 2$ (altrimenti non è una approssimazione nemmeno lontana di $\sqrt{2}$) e possiamo scrivere

$$1 \leq \left| p^2 - 2q^2 \right| = \left| (p - \sqrt{2}q)(p + \sqrt{2}q) \right| = \left| p - \sqrt{2}q \right| (p + \sqrt{2}q).$$

Dividiamo il tutto per q^2 ottenendo

$$\frac{1}{q^2} \leq \left| \frac{p}{q} - \sqrt{2} \right| \left(\frac{p}{q} + \sqrt{2} \right) \leq 4 \left| \frac{p}{q} - \sqrt{2} \right|,$$

dove l'ultima diseguaglianza deriva dal fatto che sia $\frac{p}{q}$ che $\sqrt{2}$ sono minori di 2.

Raccogliendo tutte le diseguaglianze otteniamo quindi

$$\frac{1}{4q^2} \leq \left| \frac{p}{q} - \sqrt{2} \right| \leq \frac{1}{q^2},$$

dove la diseguaglianza dal basso vale per ogni q, mentre la stima dall'alto vale solo per certi q.