Note sul calcolo degli integrali tramite il metodo dei rettangoli

13 dicembre 2013

In molti casi (anzi praticamente nella grande maggioranza) il calcolo esplicito dell'integrale definito $\int_a^b f(x)\,dx$ con f funzione continua non è possibile perchè non si conosce una primitiva esplicita della f o perché –pur potendosi calcolare– tale primitiva risulta essere molto complessa.

È importante avere quindi dei metodi approssimati per il calcolo degli integrali definiti ed è ancora più importante saper stimare l'errore commesso. Diamo ora una stima dell'errore che si commette approssimando l'integrale con il cosiddetto *metodo dei rettangoli*.

Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali, per mezzo degli $n + 1$ punti x_k

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

e assumiamo come valore approssimato per $\int_a^b f(x)\,dx$ la seguente somma finita

$$S_n = \frac{b-a}{n}\left[(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right].$$

questo corrisponde nell'approssimare la funzione f con una funzione costante a tratti, che coincide con f nell'estremo sinistro di ciascun intervallino:

$$f(x) \sim f(x_{k-1}) \quad \text{in } [x_{k-1}, x_k].$$

È chiaro che il metodo darebbe un valore esatto dell'integrale se f fosse una funzione costante e quindi possiamo aspettarci che il metodo funzioni bene se la funzione f non si "discosta troppo" da una costante. Siccome le variazioni di una funzione possono essere misurate con la derivata prima (tramite il teorema di Lagrange per esempio) è plausibile avere una stima quantitativa dell'errore commesso in termini di f'. Più precisamente vale il seguente teorema

Teorema. Supponiamo che $|f'(x)| \leq M$ per tutte le $x \in [a, b]$, allora

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| \leq \frac{M}{2}\frac{(b-a)^2}{n}.$$

Tale stima dimostra che per funzioni a derivata limitata, al crescere di n la somma S_n approssima sempre meglio il valore dell'integrale e permette anche di fissare in quante parti suddividere l'intervallo affinchè l'errore commesso sia minore di una qualsiasi quantità fissata.

La dimostrazione (abbastanza tecnica) di questo risultato è riportata qui sotto e passa attraverso un Lemma che deriva direttamente dalla formula di integrazione per parti.

Lemma. Sia $\phi \in C^1([0,\sigma])$ e tale che $\phi(0) = 0$. Allora

$$\int_0^\sigma \phi(x)\,dx = \int_0^\sigma (\sigma - x)\phi'(x)\,dx.$$

Dimostrazione. Integrando per parti e osservando che $\frac{d}{dx}(x-\sigma) = 1$ per qualsiasi $\sigma \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\int_0^\sigma 1\cdot\phi(x)\,dx = (x-\sigma)\,\phi(x)\Big|_0^\sigma - \int_0^\sigma (\sigma - x)\phi'(x)\,dx = \int_0^\sigma (x-\sigma)\phi'(x)\,dx,$$

dato che nel termine finito quando $x = \sigma$ si annulla $x - \sigma$, mentre $\phi(x)$ si annulla per $x = 0$.

Passiamo ora alla dimostrazione del teorema

Dimostrazione della stima dell'errore. Poniamo $\sigma = \frac{b-a}{n}$ e osservando che

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} c\,dx = c\,\sigma,$$

per ogni costante $c \in \mathbb{R}$, possiamo scrivere (fissando $c = f(x_{k-1})$)

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - \sigma f(x_{k-1}) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_{k-1}))\,dx.$$

Con il cambio di variabile $x = x_{k-1} + t$ possiamo quindi scrivere

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - \sigma f(x_{k-1}) = \int_0^\sigma (f(x_{k-1}+t) - f(x_{k-1}))\,dt.$$

La funzione $\phi(t) = f(x_{k-1}+t) - f(x_{k-1})$ si annulla per $t = 0$ e quindi.

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - \sigma f(x_{k-1}) = \int_0^\sigma (\sigma - t)\phi'(t)\,dt.$$

Osserviamo ora che $\phi'(t) = f'(x_{k-1}+t)$, quindi $|\phi'(t)| \le M$, pertanto.

$$\begin{aligned}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - \sigma f(x_{k-1})\right| &= \left|\int_0^\sigma (\sigma - t)\phi'(t)\,dt\right| \le \int_0^\sigma |(\sigma - t)\phi'(t)|\,dt\\ &\le \int_0^\sigma (\sigma - t)\,|\phi'(t)|\,dt \le M\int_0^\sigma (\sigma - t)\,dt.\end{aligned}$$

Calcolando esplicitamente l'ultimo integrale si ha

$$\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - \sigma f(x_{k-1})\right| \le \frac{M}{2}\sigma^2.$$

Ora possiamo concludere dato che

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} f(x_k)\right)\right|\\ &\le \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} f(x_k)\right|\\ &\le \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M}{2}\sigma^2 = n\frac{M}{2}\sigma^2.\end{aligned}$$

Richiamando la definizione di σ si ha la tesi.