Prova informale di Analisi Matematica I, 20/12/2013

Parte I, domande a risposta chiusa: Ogni domanda ha una e una sola risposta corretta

1. Calcolare la retta tangente alla funzione $f(x) = x^x$ nel punto $x_0 = 2$

   A: $4(1 + \log(2))(x - 2) + 4$ **B:** $4(x - 2) + 4$ **C:** $4(1 + \log(x))(x - 2) + 4$ **D:** N.A. **E:** $2(1 + \log(2))(x - 2) + 4$

2. Per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{n^{3n-\alpha}}$$
   converge

   A: $\alpha > \pi$ **B:** $\alpha < 1$ **C:** $\alpha > 1$ **D:** $\alpha > 0$ **E:** N.A.

3. La funzione
$$f(x) = \begin{cases} \log(\log(x)) & x > e \\ \dfrac{x}{e} - 1 & x \leq e \end{cases}$$
   nel punto $x_0 = e$ è

   A: continua e derivabile **B:** continua e non derivabile **C:** derivabile ma non continua **D:** nè continua nè derivabile **E:** N.A

4. Data la funzione $f(x) = \sqrt[x]{\log(x)}$ allora $f'(e)$ vale

   A: e^2 **B:** 0 **C:** N.E. **D:** $1/e^2$ **E:** N.A.

5. Dato $z = 1 - i$, allora $\arg(z^{2013})$ vale

   A: 0 **B:** $\frac{3\pi}{4}$ **C:** $-\frac{7\pi}{4}$ **D:** π **E:** N.A.

6. La funzione $f(x) = \sin^2(x)$, definita per $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ è convessa in **A:** $|x| \leq \pi/4$ **B:** $x = 0$ **C:** N.A. **D:** $0 < x < \pi/2$ **E:** $\pi/2 < x < \pi$.

7. Il limite
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^2 + x\sin(x^2)}{x^3 \arctan(1/x)}$$
   vale

   A: 0 **B:** N.E. **C:** 2 **D:** π **E:** N.A.

Risposte corrette: 1A, 2E, 3A, 4D, 5B, 6A, 7E.

Parte II, esercizi da svolgere

1. Risolvere l'equazione complessa

$$1 + i\|\lambda^3\| = 1 + \lambda, \qquad \lambda \in \mathbf{C}$$

Traccia della soluzione. Osserviamo che la parte reale del termine a sinistra dell'uguale vale 1, qualsiasi sia λ, quindi perchè anche il termine a destra abbia la stessa parte reale serve che λ non abbia parte reale, cioè $\lambda = 0 + iy$.

Sostituendo e uguagliando le parti immaginarie troviamo l'equazione

$$|y^3| = y$$

che ha come soluzioni $y = 0, 1$, quindi le due soluzioni del problema sono

$$\lambda = 0, \qquad \lambda = i.$$

2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = \sin(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Traccia della soluzione. L'equazione caratteristica ha come soluzioni $\lambda = -1$, quindi il problema omogeneo ha come soluzione $Y(x) = e^{-x}$. Non si ha risonanza e quindi la soluzione particolare del problema non omogeneo va cercata della forma

$$y_f(x) = a\sin(x) + b\cos(x).$$

Sostituendo e svolgendi i calcoli si trova

$$y_f(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2}.$$

e imponendo la condizione iniziale

$$y(x) = \frac{e^{-x} + \sin(x) - \cos(x)}{2}$$

3. Verificare che

$$f(x) = \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1 - x^8} = \frac{4\sqrt{2} - 4x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{4x}{1 - x^2}. \qquad (1)$$

Calcolare poi $\int_0^{1/\sqrt{2}} f(x)\,dx$ e usando la formula per la progressione geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{8n} = \frac{1}{1-x^8}$ verificare che

$$\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right).$$

Traccia della soluzione. Data la scomposizione in funzioni razionali con denominatore di grado 2, una primitiva $G(x)$ della funzione $f(x)$ si calcola facilmente e vale

$$G(x) = 4 \arctan\left(\sqrt{2}x - 1\right) - 2\log(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + 2\log(x^2 - 1),$$

e quindi

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} f(x)\,dx = G(x)\Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \pi.$$

Calcoliamo ora lo stesso integrale osservando che

$$\frac{x^{k-1}}{1 - x^8} = x^{k-1} \sum_{n=0}^{+\infty} x^{8n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{k-1+8n}, \qquad |x| < 1.$$

Possiamo riscrivere $f(x)$ come segue

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\sqrt{2}\frac{1}{1-x^8} - 8\frac{x^3}{1-x^8} - 4\sqrt{2}\frac{x^4}{1-x^8} - 8\frac{x^5}{1-x^8}, \\ &= 4\sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty} x^{8n} - 8\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3+8n} - 4\sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty} x^{4+8n} - 8\sum_{n=0}^{+\infty} x^{5+8n} \end{aligned}$$

e quindi, integrando e scambiando sommatoria e integrali

$$\begin{aligned} \int_0^{1/\sqrt{2}} f(x)\,dx =& 4\sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{1/\sqrt{2}} x^{8n}\,dx - 8\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{1/\sqrt{2}} x^{3+8n}\,dx \\ & - 4\sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{1/\sqrt{2}} x^{4+8n}\,dx - 8\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{1/\sqrt{2}} x^{5+8n}\,dx. \end{aligned}$$

Svolgendo i facili calcoli si ottiene la fomula (1) che è nota come formula di Bailey-Borwein-Plouffe e che permette di calcolare la n-esima cifra dello sviluppo esadecimale di π, senza conoscere le cifre precedenti.