Prova informale di Analisi Matematica I, 11/11/2013

Parte I, domande a risposta chiusa: Ogni domanda ha una e una sola risposta corretta

1. I punti di non derivabilità di $f(x) = |x^4 - 1|$ sono

   A: Nessuno **B:** 0 **C:** $\mathbb{R}$ **D:** $\mathbb{N}$ **E:** N.A.

2. L'estremo inferiore di

   $$A := \{y = x^4 - 2x^2 + 1,\ x \in \mathbb{R}\}$$

   vale **A:** 1 **B:** e **C:** $\log(2)$ **D:** N.A. **E:** $4\log(2)$

3. La somma

   $$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

   A: 4/3 **B:** 2 **C:** 3 **D:** **E:** N.A

4. L'estremo inferiore di

   $$A := \{x \in \mathbb{R} : x^4 - 2x^2 + 1 \leq 0, \}$$

   vale **A:** 1 **B:** e **C:** $\log(2)$ **D:** N.E. **E:** $4\log(2)$

5. Modulo e argomento del numero complesso $z = \frac{(1-i)^3}{1+i}$ valgono

   A: N.A. **B:** $(\sqrt{2}, \pi/6)$ **C:** $(2, \pi)$ **D:** $(2, 0)$ **E:** $(\sqrt{2}, 0)$

6. Data $f(x) = \sin(\pi e^x)$, allora $f'(\log(2))$ vale

   A: $\log(4)$ **B:** 2 **C:** 0 **D:** N.A. **E:** 2π

7. Il limite

   $$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{2/n} - 1}{3\tan(\pi/n)}$$

   vale

   A: $2/3\pi$ **B:** N.E. **C:** N.A. **D:** $+\infty$ **E:** $\frac{\pi}{2}$.

8. Dato $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, la funzione

   $$f(x) = |x + \lambda| x$$

   è derivabile per

   A: $x \neq 0$ **B:** $x > 0$ **C:** $x \neq -\lambda$ **D:** N.E. **E:** N.A.

Risposte corrette: 1E, 2D, 3A, 4A, 5D, 6E, 7A, 8C

Parte II, esercizi da svolgere

1. Dimostrare che
$$n^n \leq (n!)^2$$
Traccia della soluzione. Osserviamo che il termine a destra può essere scritto come
$$(n!)^2 = (1 \cdot n \cdot \dots \cdot n-1 \cdot n)^2 = (1 \cdot n \cdot \dots \cdot n-1 \cdot n)(n \cdot n-1 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1)$$
e invertendo l'ordine dei termini del secondo fattoriale
$$(n!)^2 = (1 \cdot n)(2 \cdot n-1)\dots(n-1 \cdot 2)(n \cdot 1) = \Pi_1^n\, k \cdot (n-k+1).$$
È pertanto sufficiente mostrare ore che $k \cdot (n-k+1) \geq n$ per concludere. Osserviamo che
$$k \cdot (n-k+1) - n = (n-k)(k-1) \geq 0,$$
che mostra quindi il risultato voluto.

2. Calcolare con un errore inferiore a un decimo
$$\sqrt[3]{1/2}$$
con il metodo di bisezione.

Traccia della soluzione. Per calcolare la quantità cercata si può studiare il problema di trovare la (unica) radice reale x_0 del polinomio di terzo grado $p(x) = x^3 - 1/2$.

Preliminarmente osserviamo che $p(0) = 1/2 < 0$, mentre $p(1) = 1/2 > 0$, quindi la radice è localizzata nell'intervallo $I_1 = [0, 1]$. Applichiamo la bisezione e nel punto di mezzo di I_1 si ha $p(1/2) = 1/8 - 1/2 < 0$, quindi la radice si trova nell'intervallo $I_2 = [1/2, 1]$. Dividiamo ancora a metà e troviamo $p(3/4) = 27/81-1/2 < 0$, quindi la radice è localizzata in $I_3 = [3/4, 1]$. Dividiamo ancora e troviamo nel punto di mezzo $p(7/8) = 7^3/8^3 - 1/2 > 0$, quindi la radice si trova nell'intervallo $I_4 = [3/4, 7/8]$, che ha lunghezza uguale a $1/8$. Scegliendo il punto di mezzo di I_4 che chiamiamo $\widetilde{x} = 13/16$, la vera radice, trovandosi in I_4 non può distare da x_0 più di $1/16 < 1/10$, quindi
$$\widetilde{x} = \frac{13}{16} = 0.8125.$$
ìl valore corretto a meno di un decimo. (Con qualsiasi calcolatrice si puoò verificare che $x_0 = 0.79370052598409973738\dots$)