Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica & Telecomunicazioni
Prova di Analisi Matematica 1

16 dicembre 2011

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=782224

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 782224

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=782224

PARTE A

1. La soluzione particolare di $y^{(iv)} + y^{(iii)} = x\mathrm{e}^{-x}$ è della forma
   A: $ax^3\mathrm{e}^{-x}$ B: N.A. C: $ax\mathrm{e}^{-x}$ D: $(ax+bx^2)\mathrm{e}^{-x}$ E: $ax(\sin(x)+\cos(x))$
2. Inf, min, sup e max dell'insieme
   $$A = \{x \in \mathbb{R} : \ \log(\mathrm{e}^x + 1) < 1\}$$
   valgono
   A: N.A. B: $\{-\infty, 0, N.E., 0\}$ C: $(-\infty, 0, -\infty, 0)$ D: $\{-\infty, \mathrm{e}{-1}, N.E., 0\}$ E: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$
3. Calcolare
   $$\sum_{n=-1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$
   A: $\frac{1}{2}$ N.A. B: $+\infty$ C: $\frac{3}{2}$ D: $\frac{9}{2}$
4. L'integrale
   $$\int_1^2 \frac{x-1}{(x+2)^2}\, dx$$
   vale
   A: 0 B: $1 - \log(4/3)$ C: $\arctan(4/3)$ D: N.A. E: $-1/4 + \log(4/3)$
5. Data $f(x) = \mathrm{e}^{\cos(x^3)}$, allora $f'((\pi/2)^3)$ vale
   A: $\sqrt{2\pi}$ B: 0 C: $-\sqrt{3\pi}$ D: N.A. E: 1
6. Il polinomio di Taylor di grado 1 in $x_0 = 0$ della funzione $\log(1 + \sin(x))$ vale
   A: $1 + x$ B: $2x$ C: $1 + x - x^2$ D: N.A. E: $-x$
7. Il raggio di convergenza della serie di potenze
   $$\sum_{n=6}^{+\infty} \frac{n^2 + 2^n}{n} (x - \pi)^n$$
   vale
   A: N.A. B: $1/2$ C: π D: 0 E: 2
8. Quante soluzioni ha l'equazione $\sin(x) = x^2$
   A: N.A. B: 3 C: 1 D: 0 E: 2
9. Calcolare l'immagine di $f(x) = (x^2 + 1)\mathrm{e}^{2x}$, per $x \in [0, +\infty[$
   A: $[1, +\infty[$ B: $]-\infty, 1]$ C: $[0, 1]$ D: N.A. E: $]0, 1]$
10. Il limite
    $$\lim_{x \to 1} \frac{\log(\cos(1-x))}{\sin^2(1-x)}$$
    vale
    A: N.A. B: N.E. C: $1/2$ D: -1 E: $-1/2$

CODICE=782224

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 782224

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	●	○	○	○	○
3	○	○	○	●	○
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	●	○
6	○	○	○	●	○
7	○	●	○	○	○
8	○	○	○	○	●
9	●	○	○	○	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=782224

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica & Telecomunicazioni
Prova di Analisi Matematica 1

16 dicembre 2011

PARTE B

1. Determinare i $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che l'equazione

$$\|\lambda\| = \frac{1+|x|}{2+x}, \qquad x \geq 0$$

ammetta soluzione.

Dato che $\|\lambda\| \geq 0$ si tratta di capire quale sia l'immagine della funzione reale $f(x) = \frac{1+|x|}{2+x}$. Si vede facilmente che $f > 0$, f è strettamente monotona e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Pertanto

$$\operatorname{Im} f = [1/2, 1[,$$

quindi l'equazione ha soluzione per i $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $1/2 < \|\lambda\| \leq 1$.

2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = t\cos(\pi\, t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni della omogenea sono $c_1\cos(t) + c_2\sin(t)$. Non essendoci risonanza la soluzione particolare va cercata della forma

$$y_f = (a+bt)\cos(\pi t) + (c+dt)\sin(\pi t).$$

Sostituendo si trova in seguente integrale generale

$$c_1\cos(t) + c_2\sin(t) - \frac{t}{\pi^2-1}\cos(\pi t) + \frac{2\pi}{(\pi^2-1)^2}\sin(\pi t)$$

e imponendo le condizioni iniziali si ha alla fine

$$y(t) = \cos(t) - \frac{t}{\pi^2-1}\cos(\pi t) + \frac{2\pi}{(\pi^2-1)^2}\sin(\pi t)$$

CODICE=782224

3. Studiare la convergenza ed eventualmente calcolare

$$\int_2^{+\infty} \frac{x+1}{x^2(x^2+9)}\,dx.$$

La funzione integranda è positive e $\frac{x+1}{x^2(x^2+9)} = \mathcal{O}(x^{-3})$, quindi l'integrale converge (assolutamente). Con la decomposizione in fratti semplici

$$\frac{x+1}{x^2(x^2+9)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+9}$$

si ottiene

$$\int \frac{x+1}{x^2(x^2+9)}\,dx = \frac{-1}{9\,x} - \frac{\arctan(\frac{x}{3})}{27} + \frac{\log(x)}{9} - \frac{\log(9+x^2)}{18} + C$$

e infine

$$\int_2^{+\infty} \frac{x+1}{x^2(x^2+9)}\,dx = \frac{3-\pi+2\,\arctan(\frac{2}{3})+3\,\log(\frac{13}{4})}{54}$$

4. Studiare la convessità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ della funzione $f(x) = \log(x^\alpha)$, $x > 0$.

La funzione $\log(x^\alpha)$ risulta definita e derivabile infinite volte per $x > 0$ e in particolare

$$f''(x) = -\frac{\alpha}{x^2} \geq 0 \quad \text{se e solo se} \quad \alpha \leq 0.$$

CODICE=782224