Prova informale di Analisi Matematica I, 9/11/2011

Parte I, domande a risposta chiusa

Ogni domanda ha una e una sola risposta corretta

1. La funzione
$$f(x) = \log\left(e^{(e-1)x}\right)$$
è

   A: Cresc. **B:** Decr. **C:** Limitata **D:** Positiva **D:** N.A.

2. L'estremo superiore di
$$A = \left\{ x \in \mathbf{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi\} \quad x < \tan(x) \right\}$$
vale

   A: N.A. **B:** $-\infty$ **C:** $\frac{\pi}{2}$ **D:** N.E. **E:** $\pi/4$

3. Dire quante soluzioni ammette in $x > -1$ l'equazione
$$x^2 - 1 = \log(x+1)$$

   A: 3, **B:** 2, **C:** Nessuna, **D:** 1, **E:** N.A.

4. Il limite di successione
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}$$
vale

   A: 0 **B:** 1 **C:** $N.E.$ **D:** $+\infty$ **E:** N.A.

5. Modulo e argomento del numero complesso $z = -2\sqrt{3} + 2i$ valgono

   A: N.A. **B:** $(5, 5\pi/6)$ **C:** $(4, 7\pi/6)$ **D:** $(4, -5\pi/6)$ **E:** $(1, \pi/6)$

6. Data $f(x) = \arctan(\sinh(x))$, allora $f'(\log(2))$ vale

   A: $\log(4)$ **B:** 2 **C:** 0 **D:** N.A. **E:** 4/5

7. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\tan(x)}{x}$$
vale

   A: 4. **B:** N.E. **C:** N.A. **D:** $+\infty$ **E:** $\frac{\pi}{2}$.

8. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\lambda x) & \text{se } x < 0 \\ 1 - \alpha x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

è derivabile su tutto $\mathbf{R}$ per (λ, α) uguali a **A:** $(0, 1)$ **B:** $(1, 0)$ **C:** $(1, \alpha)$ con $\alpha > 0$ **D:** N.E. **E:** N.A.

Parte II, esercizi da svolgere

1. Dire per quali α si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(x) - x}{x^\alpha(1-\cos(2x))} = K \neq 0,$$

e in tale caso calcolare K.

2. Si consideri la seguente funzione

$$f(x) = x^2 e^{-\lambda x}, \qquad \lambda \geq 0.$$

Si calcoli l'immagine di $f(x)$ per $x \geq 0$.

Lista risposte corrette Parte I: 1A, 2A, 3B, 4A, 5A, 6E, 7B, 8E.

Traccia soluzione esercizi da svolgere Parte II

1. Il limite in questione è della forma $\frac{0}{0}$. Per studiare il limite osserviamo che usando i limiti notevoli si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2} = 2,$$

e quindi possiamo semplificare il limite moltiplicando e dividendo per x^2

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(x)-x}{x^\alpha(1-\cos(2x))} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(x)-x}{x^\alpha\, x^2} \frac{x^2}{1-\cos(2x)}$$

e rimane da studiare il limite $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(x)-x}{x^{\alpha+2}}$, per il quale possiamo applicare il teorema de L'Hopital. Derivando numeratore e denominatore otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(x)-1}{(\alpha+2)x^{\alpha+1}}$$

che è ancora una forma del tipo $\frac{0}{0}$. Derivando ulteriormente si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(x)}{(\alpha+2)(\alpha+1)x^\alpha},$$

che è ancora una forma del tipo $\frac{0}{0}$. Derivando la terza volta si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(x)}{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha x^{\alpha-1}}$$

il numeratore tende a 1 e il denominatore è finito e non nullo solo se $\alpha = 1$. In tal caso il denominatore ha come limite 6.

Da questo ricaviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(x)-x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

e quindi per il teorema sul prodotto dei limiti

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(x)-x}{x^\alpha(1-\cos(2x))} = \frac{1}{12}.$$

2. La funzione in questione è continua e derivabile per ogni $x \geq 0$. Osserviamo che nel caso $\lambda = 0$, si riduce alla funzione $f(x) = x^2$, che ha come immagine la semiretta $[0, +\infty[$. Per $\lambda > 0$ invece una prima analisi mostra che $f(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$, mentre $f(0) = 0$, e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Calcolando la derivata prima si ha

$$f'(x) = -x\,(-2 + \lambda\,x)e^{-\lambda\,x}.$$

Per $x > 0$ e $\lambda > 0$ si ha

$$f'(x) > 0 \qquad \text{se } 0 < x < \frac{2}{\lambda}.$$

Essendoci un cambio di segno della derivata prima da positiva a negativa, si ha un massimo relativo nel punto $x_0 = \frac{2}{\lambda}$. Essendo la funzione monotona nei due sotto-intervalli si ricava che in realtà x_0 è punto di massimo assoluto e il massimo vale $f(2/\lambda) = \frac{4}{e^2\lambda^2}$ pertanto

$$\mathrm{Im}(f) = \begin{cases} [0, +\infty[& \text{se } \lambda = 0 \\ [0, \dfrac{4}{e^2\lambda^2}] & \text{se } \lambda > 0. \end{cases}$$