Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e Telecomunicazioni
Prova informale di Analisi Matematica 1

22 dicembre 2010

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=075613

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e Telecomunicazioni
Prova informale di Analisi Matematica 1

22 dicembre 2010

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 075613

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=075613

PARTE A

1. La funzione $f(x) = \begin{cases} \arctan(ax)+1 & \text{per } x<0 \\ \\ x^2+x & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$ è derivabile per

   A: $a=1$ B: $a=k\pi$ C: $a \in \mathbb{R}$ D: N.A. E: mai

2. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ \sin(x) > -\pi^2/3\}$$

   valgono

   A: $\{\pi/6, N.E., 5\pi/6, N.E.\}$ B: $\{0, 0, 2\pi, 2\pi\}$ C: N.A. D: $\{0, 0, \pi/6, N.E.\}$ E: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$

3. Il minimo assoluto di $f(x) = |x^2 - 4x + 1|$, definita per $x \in \mathbb{R}$, vale

   A: N.E. B: 1 C: $2+\sqrt{3}$ D: 0 E: N.A.

4. Il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(x^2))}{x^4}$$

   vale

   A: $+\infty$ B: N.E. C: N.A. D: $-\frac{1}{2}$ E: 0

5. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin^2(3x)$ nel punto $x_0 = \pi/12$ vale

   A: $1+\sin(3x)(x-\pi/12)$ B: $3x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ C: $-\frac{-12x+\pi-4}{4\sqrt{2}}$ D: N.A. E: $1+x+x^2$

6. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \mathrm{e}^{x^3}$ è

   A: non derivabile in $x=0$ B: N.A. C: surgettiva D: concava E: monotona crescente

7. Il coefficiente della parte immaginaria di

$$z = \frac{1+i^3}{(1+i)^3}$$

   è uguale a

   A: 1 B: N.A. C: $-1/2$ D: i E: 0

8. Modulo e argomento del numero complesso $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{i}\right)^8$ sono

   A: $(27, 2\pi)$ B: N.A. C: $(3^5, 0)$ D: $(3^4, \pi/2)$ E: $(9^2, 0)$

9. Il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \cos(e^x)}{x + \sin(x^2)}$$

   vale

   A: 0 B: 1 C: N.A. D: N.E. E: $+\infty$

10. Data $f(x) = (\tan(x))^x$. Allora $f'(\pi/4)$ è uguale a

    A: N.A. B: $\pi/4$ C: 0 D: $-\pi/2$ E: N.E.

CODICE=075613

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e Telecomunicazioni
Prova informale di Analisi Matematica 1

22 dicembre 2010

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 075613

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	○	○	●
3	○	○	○	●	○
4	○	○	○	●	○
5	○	●	○	○	○
6	○	○	○	○	●
7	○	○	○	○	●
8	○	○	○	○	●
9	○	●	○	○	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=075613

PARTE B

Tempo per lo svolgimento 2 ore

1. Studiare, l'immagine della funzione
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}, \qquad \text{per } |x| \geq 1,\ x \neq -2.$$

2. Studiare il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\sin(x)}}{x - \sin(x)}$$

3. Risolvere per $z \in \mathbb{C}$ della forma $z = 1 + ix$ la diseguaglianza
$$|z + \overline{z}^2| < (\mathrm{Im}(z))^2 + 1$$

4. Dimostrare che
$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2n - 1 = n^2.$$

CODICE=075613

Traccia della soluzione

1. Cominciamo a studiare i valori agli estremi del dominio.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}=1 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}=-1$$

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}=+\infty \qquad \lim_{x\to-2^-}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}=-\infty$$

La funzione è continua in tutto il dominio e la derivata prima vale

$$f'(x)=\frac{2x+1}{(x+2)^2\sqrt{x^2-1}}$$

che risulta positiva per tutte le x appartenenti al dominio e tali che $x>-1/2$. La funzione f risulta quindi strettamente crescente per $x\geq 1$. La funzione è strettamente decrescente sia per $x<-2$ che per $-2<x<-1$, ma non risulta decrescente in tutto per $x<-1$, con $x\neq 2$. La derivata seconda risulta uguale a

$$f''(x)=\frac{-4x^3-3x^2-2}{(x+2)^3\left(x^2-1\right)^{3/2}}.$$

Il polinomio $-4x^3-3x^2-2$, è positivo per $x<-2$ e negativo per $x\geq 1$. Inoltre passa da positivo a negativo per un $x_0\in]-2,-1[$, infatti $-4x^3-3x^2-2_{|x=-2}=18$, mentre $-4x^3-3x^2-2_{x=-1}=-1$ (e studiando la sua derivata prima si vede che c'è un solo zero). Pertanto si ha che $f''(x)>0$ per $-2<x<x_0$, con $-2<x_0<-1$ e $f''<0$ in tutti gli altri punti del dominio. Il grafico approssimativo della funzione è il seguente.

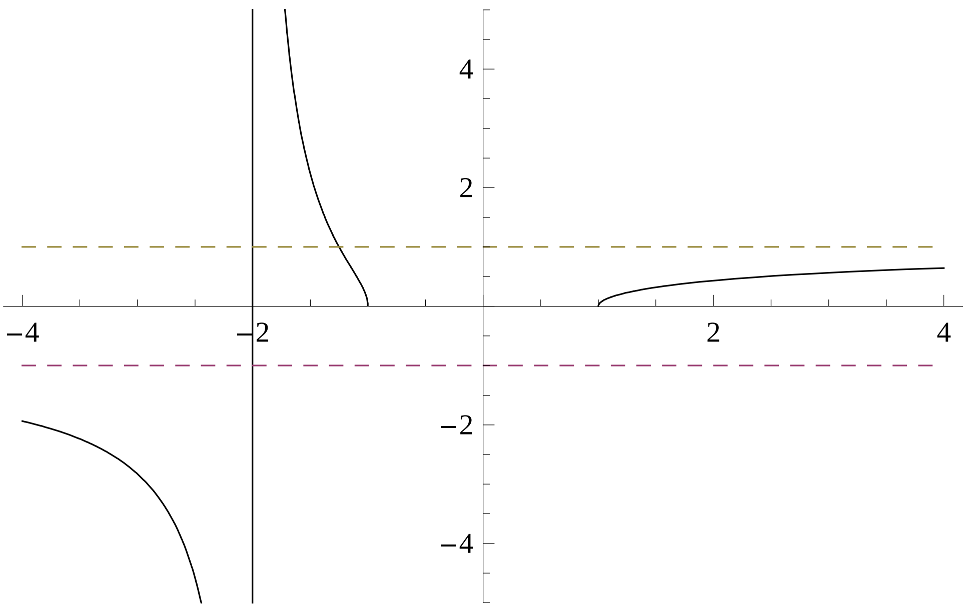

Figura 1: Le rette tratteggiate sono gli asintoti orizzontali

2. Il limite è della forma $\frac{0}{0}$ e applichiamo la regola de L'Hôpital e derivando numeratore e denominatore otteniamo il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin(x)}\cos(x)}{1-\cos(x)}$$

CODICE=075613

che è ancora della forma $\frac{0}{0}$.
Derivando nuovamente

$$\lim_{x\to 0} \frac{-e^{\sin(x)}\cos^2(x) + e^x + e^{\sin(x)}\sin(x)}{\sin(x)}$$

che è ancora della forma $\frac{0}{0}$.
Derivando una terza volta si arriva al limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{-e^{\sin(x)}\cos^3(x) + e^{\sin(x)}\cos(x) + 3e^{\sin(x)}\sin(x)\cos(x) + e^x}{\cos(x)} = 1.$$

Quindi il limite richiesto dall'esercizio esiste e vale 1.

3. La diseguaglianza è equivalente a

$$|-x^2 - ix + 2| < x^2 + 1$$

quindi

$$\sqrt{(2-x^2)^2 + x^2} < x^2 + 1.$$

Quadrando entrambi i lati e risolvendo la diseguaglianza bi-quadratica

$$x^4 - 3x^2 + 4 < x^4 + 2x^2 + 1$$

si ottiene che la diseguaglianza è risolta per $\left\{x < -\sqrt{\frac{3}{5}}\right\} \cup \left\{x > \sqrt{\frac{3}{5}}\right\}$.

4. Per $n = 1$, l'indentità è vera. Per induzione supponiamo che sia vera per un $M \in \mathbb{N}$ e dimostriamo che è vera anche per $M + 1$. Se

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2M - 1 = \sum_{k=1}^{M}(2k-1) = M^2.$$

allora

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2M-1) + (2M+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{M+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{M}(2k-1) + 2M + 1 = M^2 + 2M + 1 = (M+1)^2.$$

CODICE=075613