Prova informale di Analisi Matematica I, 11/11/2009
Cenni di soluzione

Parte I, domande a risposta chiusa

Ogni domanda ha una e una sola risposta corretta

1. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{4x+1}$$
vale

   A: N.E. **B:** $+\infty$ **C:** e^4 **D:** e^{-4} **D:** N.A.

   Riscrivendo il limite come
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{4x+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{2x+3}\right)^{4x+1}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{2x+3}\right)^{-\frac{2x+3}{2}\frac{2}{2x+3}(-4x-1)}.$$
   Con il cambio di variabile $y=2/(2x+3)$ si ottiene
$$\lim_{y\to0^+}(1-y)^{-1/y}=e$$
   e quindi
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{4x+1}=e^{-4}$$

2. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x+1)-\ln(x)}$$
vale

   A: N.A. **B:** ∞ **C:** $\frac{1}{2}$ **D:** 0 **E:** 1

   Riscrivendo il limite come
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x+1)-\ln(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$
$$=\lim_{y\to0^+}\frac{\sin(y)}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to0^+}\frac{\sin(y)}{y}\frac{y}{\ln(1+y)}$$

e usando i limiti notevoli si ha pertanto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1.$$

3. Dire quante soluzioni ammette in $\mathbb{R}$ l'equazione

$$\ln(|x|) = 1 - x^2$$

A: 4, **B:** 2, **C:** Nessuna, **D:** 1, **E:** N.A.

Sia la funzione $\ln(|x|)$ che $1-x^2$ sono pari e continue in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, quindi il numero di soluzioni è il doppio di quelle per $x > 0$. Osserviamo che la funzione $\ln(|x|)$ è strettamente crescente per $x > 0$, mentre $1 - x^2$ è strettamente descrescente e quindi i due grafici si possono incontrare al più in un punto. Visto che per $x_0 = 1$ entrambe si annullano si ha esattamente una soluzione. Quindi ci sono due soluzioni $x = 1$ e $x = -1$.

4. Il limite di successione

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left[(1+a^n)^{\frac{1}{n}}\right], \qquad a > 1$$

vale

A: 0 **B:** $\frac{\ln(a)}{a}$ **C:** $\ln(a^a)$ **D:** ∞ **E:** N.A.

Riscrivendo il limite come

$$\ln\left[(1+a^n)^{\frac{1}{n}}\right] = \ln\left[(a^n(1+1/a^n))^{\frac{1}{n}}\right] = \ln\left[a(1+1/a^n)^{1/n}\right].$$

Visto che $a > 1$ si ha che $(1+1/a^n)^{1/n} \to 1$ per $n \to +\infty$ e quindi per $a > 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left[(1+a^n)^{\frac{1}{n}}\right] = \ln(a).$$

5. Si consideri la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{se } x \in [-1,1] \\ x^3 - 1 & \text{se } x \in]1,\infty[\\ -x^3 - 1 & \text{se } x \in]-\infty,-1[\end{cases}$$

Dire quali delle seguenti affermazione è vera

A: N.A. **B:** f è continua in $\mathbb{R}$ **C:** f è pari **D:** f è dispari **E:** f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

Nei punti $x = \pm 1$ la funzione non è continua e quindi non può essere nemmeno derivabile. Con calcolo diretto si verifica che $f(-x) = f(x)$, quindi la funzione è pari.

6. La funzione
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{se } x \leq 0 \\ ax, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$
è derivabile in $x = 0$ se

A: $a = 1$ **B:** $a = 2$ **C:** $a = 0$ **D:** N.A. **E:** Mai.

La derivata vale
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & \text{se } x < 0 \\ a, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Se si pone $a = 2$ si verifica che il rapporto incrementale $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ ammette limite per $x \to 0$ e tale limite vale 2.

7. Si consideri la seguente funzione definita su $A =]-1, 1[\setminus\{0\}$
$$f(x) = (|x|)^{\frac{1}{2}}$$
Dire quali delle seguenti affermazioni è vera

A: $\max\limits_{x\in A} |f'| = +\infty$ **B:** $\inf\limits_{x\in A} |f'| > 0$ **C:** N.A. **D:** f' è monotona in A **E:** f è monotona in A.

La funzione f non è monotona (cresce per $x > 0$ e descresce per $x < 0$). La funzione f'
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & x > 0 \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & x < 0 \end{cases}$$
non è monotona (anche se decresce per $x < 0$ e per $x > 0$). Il massimo non può essere $+\infty$, mentre $|f'|$ è sempre maggiore o uguale al $1/2$, il valore assunto per $x = \pm 1$. Quindi la risposta giusta è la B.

8. Sia $z = 2 + i$, dire quanto vale la seguente quantità
$$\frac{3z - i(|z|^2 - 1) - (2 - i)\bar{z}}{2Re(z) - Im(z)}$$
A: $1 - i$ **B:** $1 + i$ **C:** 1 **D:** i **E:** N.A.

Scrivendo per esteso i calcoli e osservando che $|z|^2 = 5$, mentre $Im(z) = 1$, dato che $Im(z)$ rappresenta il coefficiente della parte immaginaria di $z \in \mathbb{C}$, si ha che
$$\frac{3z - i(|z|^2 - 1) - (2 - i)\bar{z}}{2Re(z) - Im(z)} = 1 + i.$$

Parte II, esercizi da svolgere

1. Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(0) = 1$ and $f(1) = 0$. Dimostare che esiste $y \in [0,1]$ tale che

$$f(y) = y^2 + \frac{1}{2}.$$

Risolvere il problema è equivalente dimostrare che la funzione

$$\mathcal{F}(x) = f(x) - x^2 - \frac{1}{2}$$

si annulla almeno una volta per $x \in [0,1]$. Osserviamo che f continua implica che $\mathcal{F}$ è continua (differenza di funzioni continue). Inoltre

$$\mathcal{F}(0) = f(0) - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} > 0$$
$$\mathcal{F}(1) = f(1) - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} < 0,$$

pertanto per il teorema degli zeri esiste almeno un punto $y \in]0,1[$ tale che $\mathcal{F}(y) = 0 \Longleftrightarrow f(y) = y^2 + \frac{1}{2}$.

2. Si consideri la seguente funzione

$$f(x) = e^x - x$$

Si calcoli l'immagine di $f(x)$ per $x \geq 0$.

Studiamo intanto il comportamento agli estremi

$$f(0) = 1$$
$$\lim_{x \to +\infty} e^x - x = +\infty.$$

Inoltre la funzione è derivabile e per $x > 0$ $f'(x) = e^x - 1 \neq 0$. Pertanto per il teorema di Fermat non ci sono punti di massimo o minimo locale interni. La funzione risulta crescente in tutta la semiretta e quindi $Im(f) = [1, +\infty[$.