Note sul calcolo di π

23 ottobre 2009

La proporzionalità fra l'area del cerchio A e il quadrato del suo raggio r è stata dimostrata già negli Elementi di Euclide (circa 300 a.C.). Tale rapporto A/r^2, uguale per tutti i cerchi, si indica con π. Archimede (287-212 a.C.) dimostrò che il cerchio è equivalente al triangolo (ha la stessa area) che ha come base la lunghezza della circonferenza e come altezza il raggio. In formula $A = Cr/2$ (tale formula generalizza quella per poligoni regolari con un numero finito di lati: area uguale a perimetro per apotema diviso due.) Combinando i due risultati di Euclide e Archimede si ottiene anche che $C = 2\pi r$, quindi il numero π si può calcolare mediante l'area del cerchio o calcolando il perimetro della circonferenza di raggio $1/2$ (o il semiperimetro di quella unitaria).

"Calcoliamo" ora la lunghezza della circonferenza unitaria, approssimandola per difetto e per eccesso con dei poligoni regolari di 2^n lati: la lunghezza del lato di un poligono regolare di $m \in \mathbb{N}$ lati (con $m \geq 3$), iscritto nella circonferenza di raggio $r = 1$ è uguale a m volte la lunghezza di ciascun lato. Ogni poligono di m lati può essere "scomposto" in m triangoli isosceli con angolo al vertice uguale a $2\pi/m$ e lati adiacenti di lunghezza uguale a 1. (Basta unire ciascun vertice con il centro per visualizzare tale decomposizione).

La base del triangolo risulta pertanto (verificarlo usando le identità trigonometriche usuali) di lunghezza $2\sin(\pi/m)$ e quindi il perimetro risulta uguale a

$$2m \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)$$

Se ora partiamo con un numero di lati uguale $m = 2^n$ (ovviamente con $n \geq 2$) e ogni volta raddoppiamo tale numero di lati (o dimezziamo l'angolo al vertice) otteniamo la successione reale

$$\pi_n = 2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \qquad n \geq 2.$$

Allo stesso modo possiamo costruire dei poligoni circoscritti, con un numero di lati $m = 2^n$. In questo caso il perimetro risulta essere

$$\Pi_n = 2^{n+1} \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \qquad n \geq 2.$$

Dalla interpretazione geometrica risulta chiaro che

$$\begin{aligned}
&\pi_n \leq 2\pi \leq \Pi_n, \quad \forall\, n \geq 2 \\
&\pi_n \leq \Pi_n, \quad \forall\, n \geq 2 \\
&\pi_n < \pi_{n+1}, \quad \forall\, n \geq 2 \\
&\Pi_n > \Pi_{n+1}, \quad \forall\, n \geq 2
\end{aligned}$$

quindi la successione π_n è crescente a approssima 2π (la lunghezza della circonferenza) per difetto, o "dal basso"; la successione Π_n è decrescente e approssima 2π per eccesso, o "dall'alto." Le due successioni sono limitate e monotone e si può dimostrare che convergono entrambe a 2π:

$$\lim_{n\to+\infty} \pi_n = \lim_{n\to+\infty} \Pi_n = 2\pi. \tag{1}$$

Tale tecnica di calcolo non è però utile per fornire una approssimazione di π in quanto la formula

$$\pi = \lim_{n\to+\infty} 2^n \sin\big(\frac{\pi}{2^n}\big),$$

fa intervenire π anche nel termine a destra dell'uguale: non si può usare π per definire π stesso.

Per ovviare a tale inconveniente studiamo la seguente successione definita per ricorrenza (o ricorsivamente)

$$\begin{cases} c_0 = k \geq -1 \\ c_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+c_n}{2}} \end{cases}$$

Per induzione si verifica subito che $c_n > 0$ per ogni $n > 1$. Inoltre se $k \in [-1, 1]$ allora $0 < c_n \leq 1$ per ogni $n \geq 1$. Tale affermazione è vera per $n = 1$ come si ottiene per verifica diretta, inoltre se per ipotesi induttiva per un certo $N \in \mathbb{N}$ si ha $0 < c_N \leq 1$, allora

$$c_{N+1} = \sqrt{\frac{1+c_N}{2}} \leq \sqrt{\frac{1+1}{2}} = 1,$$

questo conclude la dimostrazione.

Inoltre per ogni $n \geq 1$ si ha che

$$0 < c_n \leq \frac{1+c_n}{2} \leq \sqrt{\frac{1+c_n}{2}} = c_{n+1},$$

dove abbiamo osservato che $\sqrt{x} \geq x$, per ogni $x \in [0, 1]$. Pertanto la successione $\{c_n\}$ è monotona crescente e limitata e quindi ammette limite.

Ricordiamo ora la formula di bisezione del coseno

$$\cos\Big(\frac{\alpha}{2}\Big) = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$$

e osserviamo che se $c_0 = -1 = \cos(\pi)$ si ha

$$c_n = \cos\Big(\frac{\pi}{2^n}\Big) \to 1 \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Con questa osservazione possiamo scrivere (sostituendo $\cos\big(\frac{\pi}{2^n}\big)$ con c_n) le seguenti formule ricorsive, che non contengono π

$$\begin{aligned} c_0 &= -1, \\ \pi_n &= 2^{n+1}\sqrt{1-\cos^2\big(\frac{\pi}{2^n}\big)} = 2^{n+1}\sqrt{1-c_n^2}, \\ \Pi_n &= 2^{n+1}\frac{\sqrt{1-\cos^2\big(\frac{\pi}{2^n}\big)}}{\cos\big(\frac{\pi}{2^n}\big)} = 2^{n+1}\frac{\sqrt{1-c_n^2}}{c_n}, \\ c_{n+1} &= \sqrt{\frac{1+c_n}{2}}. \end{aligned}$$

	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$\pi_n/2$	$2\sqrt{2}$ 2.8284271247461903	$4\sqrt{2-\sqrt{2}}$ 3.0614674589207187	$8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ 3.121445152258053	$16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ 3.1365484905459406
$\Pi_n/2$	4 4	$8\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$ 3.3137084989847607	$16\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ 3.1825978780745285	$32\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$ 3.1517249074292577