Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

18 dicembre 2009

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=776489

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

18 dicembre 2009

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

CODICE = 776489

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=776489

PARTE A

1. Sia f una funzione reale, continua su $\mathbb{R}$ e dispari. Quale delle seguenti affermazioni è vera
   A: $f(0) = 0$ B: f è derivabile in 0 C: $f(0) > 0$ D: N.A. E: $f'(0) > 0$
2. Dire quanto vale il seguente integrale
$$\int_0^1 \frac{(e^{4x}+1)^2}{e^{4x}}\,dx$$
   A: N.A. B: 2 C: $\frac{e^4}{4} - \frac{e^{-4}}{4} + 2$ D: $e^4 + 2 - e^{-4}$ E: $\frac{e^4}{4} - \frac{e^{-4}}{4}$
3. Dire quanto vale il seguente integrale
$$\int_0^1 (x^2+5)\,dx$$
   A: $\frac{12}{5}$ B: N.A. C: $\frac{25}{6}$ D: $\frac{16}{3}$ E: $\frac{5}{2}$
4. Dire quanto vale il modulo del numero complesso
$$z = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}$$
   A: 2 B: 4 C: 1 D: N.A. E: $\pi/9$
5. Dire per quali valori di a e b la funzione
$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ ax+b & \text{se } x > 0 \end{cases}$$
   continua e derivabile
   A: N.A B: $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{3}{2}$ C: $a = 0$ e $b = 1$ D: $a = 1$ e $b = 1$ E: $a = 1$ e $b = 0$
6. Sia
$$f(x) = e^{-x^2+4x}\cos(x-2)$$
   Dire quanto vale $f'(2)$
   A: N.A. B: $\frac{12}{5}$ C: 1 D: 0 E: $\frac{3}{2}$
7. Dire quali sono il inf e sup del seguente insieme
$$A = \{n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{(-1)^n}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$$
   A: N.A B: $(-\infty, 1)$ C: $(0, 1)$ D: $(0, +\infty)$ E: $(-1, +\infty)$
8. Dire quanto vale la seguente serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$$
   A: N.A. B: $\frac{2}{5}$ C: ∞ D: 0 E: $\frac{25}{6}$
9. Dire quanto vale il seguente limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$$
   A: 0 B: $\frac{3}{2}$ C: Non esiste D: N.A E: 1
10. Sia f una funzione monotona crescente. Quale delle seguenti affermazioni è vera.
   A: $f > 0$ B: f è limitata C: $f' > 0$ D: N.A. E: Esiste (anche non finito) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

CODICE=776489

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

18 dicembre 2009

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 776489

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	●	○	○
3	○	○	○	●	○
4	○	○	○	●	○
5	○	○	○	●	○
6	○	○	○	●	○
7	○	○	○	○	●
8	●	○	○	○	○
9	○	●	○	○	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=776489

PARTE II

ESERCIZIO 1
Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ l'andamento della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 e^{2n}}{n^{2n+\alpha}}$$

ESERCIZIO 2
Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} e^{x+y(x)}y' + x = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3
Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan(x) - x}$$

ESERCIZIO 4
Studiare la seguente funzione

$$f(x) = 2\ln|x+1| - \ln|1-x|$$

e tracciarne un grafico qualitativo.

Cenni di soluzione

ESERCIZIO 1
Usando la formula di Stirling il comportamento asintotico del termine generico della serie è

$$\frac{(n!)^2 e^{2n}}{n^{2n+\alpha}} = \mathcal{O}(n^{1-\alpha}),$$

e quindi si ha convergenza per $\alpha > 1$.
ESERCIZIO 2
L'equazione è a variabili separabili e si vede riscrivendola come

$$\mathrm{e}^{y(x)}y' = -x\mathrm{e}^{-x}.$$

Con le usuali tecniche di integrazione si ottiene

$$y(x) = \log\left(-e^{-x}(-x-1)\right)$$

ESERCIZIO 3
Usando lo sviluppo di Taylor fino all'ordine 3, oppure usando ripetutamente la regola de L'Hopital si ottiene

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan(x) - x} = -\frac{1}{2}$$

ESERCIZIO 4
La funzione risulta derivabile in tutto il dominio di definizione, e ha l'unico minimo relativo per $x = 3$, mentre i punti di flesso sono $3 - 2\sqrt{2}$ e $3 + 2\sqrt{2}$. Un grafico approssimativo è il seguente

CODICE=776489

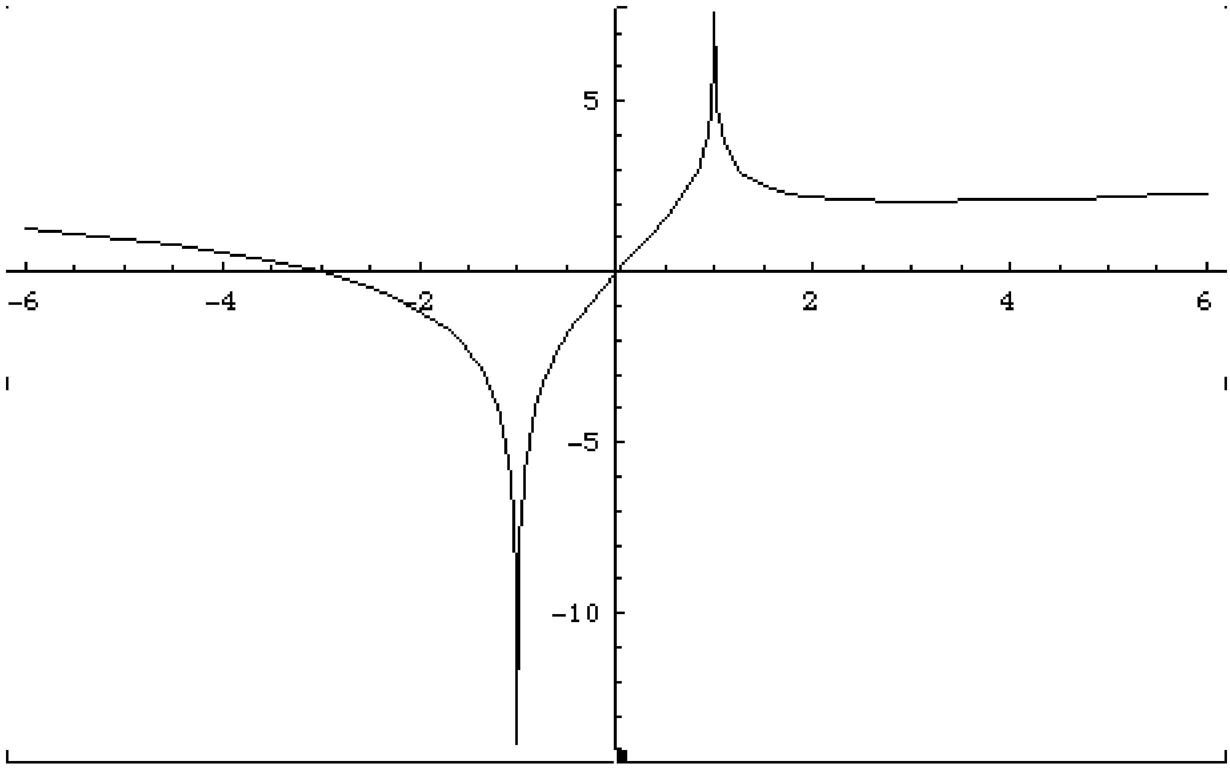

Figura 1: grafico

CODICE=776489