Note sulle funzioni trigonometriche inverse

19 ottobre 2009

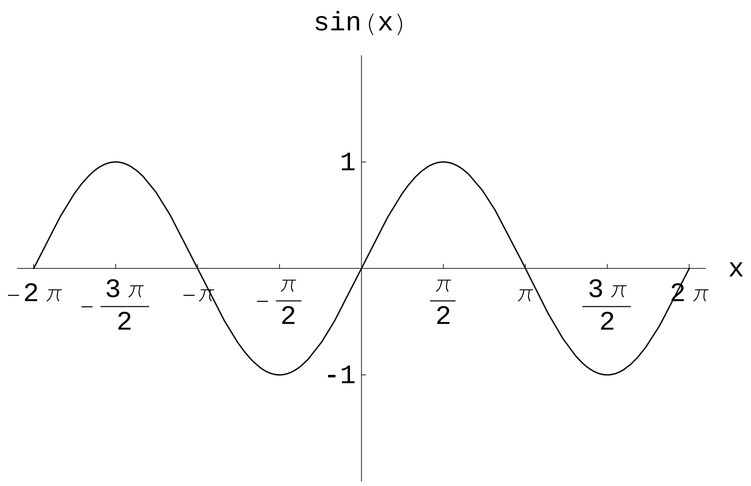
Consideriamo la funzione $f(x) = \sin(x)$, definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e con immagine $[-1, 1]$. Definiamo poi per ogni $k \in \mathbb{Z}$ la funzione f_k come la *restrizione* di f all'intervallo $I_k := [-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi]$. In pratica

$$f_k(x) = \sin(x)\Big|_{I_k} = \sin(x), \qquad \forall\, x \in [-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi].$$

Ognuna della funzioni $f_k : \ I_k \to \mathbb{R}$ risulta essere monotona e più precisamente

$$f_k \text{ è crescente in senso stretto se } k \text{ è pari}$$
$$f_k \text{ è decrescente in senso stretto se } k \text{ è pari,}$$

vedi il grafico di seguito



Quindi, mentre la funzione $\sin(x) : \ \mathbb{R} \to [-1, 1]$ non è invertibile (non è iniettiva). Viceversa, per ogni $k \in \mathbb{Z}$ la funzione $f_k : \ I_k \to [-1, 1]$ risulta invertibile e la funzione inversa f_k^{-1} ha come dominio l'intervallo $[-1, 1]$ e come immagine l'intervallo I_k.

Generalmente si indica con la funzione $x \mapsto \arcsin(x)$ la funzione f_0^{-1}, cioeè l'inversa della funzione $\sin(x)$ ristretta all'intervallo $I_0 = [-\pi/2, \pi/2]$.

Il legame tra la funzione arcsin e f_k^{-1} viene evidenziato dal seguente risultato.

Proposizione. Vale l'identità:

$$f_k^{-1}(x) = k\pi + (-1)^k \arcsin(x), \qquad \forall\, x \in [-1, 1]. \tag{1}$$

Dimostrazione. Per dimostrare la (1) fissiamo $k \in \mathbb{Z}$ e osserviamo che dalla definizione della funzione seno si ottiene

$$\sin(y) = (-1)^k \sin(y - k\pi) = \sin\big[(-1)^k (y - k\pi)\big], \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

La prima uguaglianza si verifica osservando che $\sin(y - \pi) = -\sin(y)$ (e usando ripetutamente questa proprietà), mentre la seconda si verifica usando il fatto che il seno è una funzione dispari.

Vediamo ora come usare questa osservazione: Sia $\overline{x}$ un generico punto dell'intervallo $[-1, 1]$ e sia $\overline{y} = f_k^{-1}(\overline{x}) \in I_k$,

$$\overline{y} \in I_k = [-\pi/2 + \pi, \pi/2 + k\pi] \Longleftrightarrow y - k\pi \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Usando la definizione di f_k e l'identità (2) si ha che

$$f_k(\overline{y}) = f_0\big[(-1)^k (\overline{y} - k\pi)\big].$$

(Questa uguaglianza segue osservando che per in punti dell'intervallo I_k si ha che $f_k(\overline{y}) = \sin(\overline{y})$; il termine a destra dell'uguale $(-1)^k(\overline{y} - k\pi) \in [-\pi/2, \pi/2] = I_0$ e in tale intervallo $f_0(x) = \sin(x)$.) Pertanto "applicando" f_0^{-1} ad entrambi i termini si ha anche

$$f_0^{-1}\big[f_k(\overline{y})\big] = (-1)^k (\overline{y} - k\pi).$$

Quindi "isolando" $\overline{y}$ al lato destro si ottiene

$$\overline{y} = k\pi + (-1)^k f_0^{-1}\big[f_k(\overline{y})\big].$$

Ricordando ora che

$$\overline{y} = f_k^{-1}(\overline{x}) \qquad \text{e} \qquad \overline{x} = f_k(\overline{y})$$

si ha

$$f_k^{-1}(\overline{x}) = k\pi + (-1)^k f_0^{-1}(\overline{x}).$$

Dato che nel ragionamento il punto $\overline{x}$ è fissato, ma arbitrario, segue che la formula (1) vale per ogni $x \in [-1, 1]$. $\square$

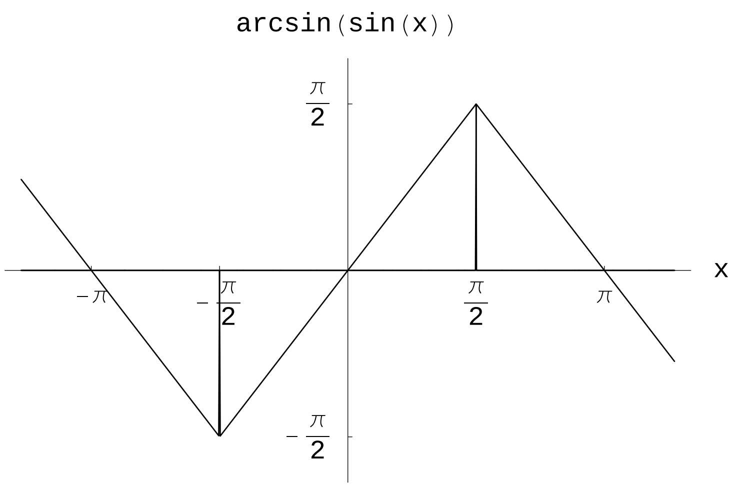
Pertanto, studiando la funzione

$$x \mapsto \arcsin(\sin(x)), \qquad x \in \mathbb{R}$$

si ha che per $x \in I_k$

$$\arcsin(\sin(x)) = f_k^{-1}(\sin(x)) = (-1)^k (x - k\pi),$$

il cui grafico risulta essere il seguente



Nello stesso modo si può mostrare anche che per $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$

$$\arccos(\cos(x)) = \begin{cases} x - k\pi & \text{se } k \text{ è pari,} \\ (k+1)\pi - x & \text{se } k \text{ è dispari.} \end{cases}$$

e che

$$\arctan(\tan(x)) = x - k\pi \qquad \text{per } x \in]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[.$$