Cenni di soluzione

Parte I

Lista delle risposte corrette 1A 2E 3A 4B 5D 6C 7B 8A 9C 10A

Parte II

1. La funzione $y(x) = e^{|x-2|}$ è uguale a

$$y(x) = \begin{cases} e^{x-2} & x \geq 2 \\ e^{2-x} & x < 2 \end{cases}$$

e la derivata vale

$$y'(x) = \begin{cases} e^{x-2} & x > 2 \\ -e^{2-x} & x < 2 \end{cases}$$

che risulta positiva per $x > 2$ e negativa per $x < 2$ e la funzione non è derivabile per $x = 2$. Inoltre

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{|x-2|} = +\infty.$$

La funzione è pertanto strettamente decrescente per $x < 2$ e strettamente crescente per $x > 2$ e ha minimo per $x = 2$, anche se non è derivabile in tale punto. Da questo si ricava che l'equazione $\lambda = e^{|x-2|}$ ha soluzione solo se $\lambda \geq e^{|2-2|} = 1$. Per $\lambda > 1$, dalla stretta de-crescenza (per $x < 2$) e crescenza (per $x > 2$) si ricava che l'equazione ha esattamente due soluzioni, una minore di 2 e una maggiore di 2. Quindi nessuna soluzione per $\lambda < 1$, una soluzione per $\lambda = 1$ e due soluzioni per $\lambda > 1$.

2. L'integrale si calcola usando la decomposizione

$$\frac{3x+1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Effettuando i calcoli si ottiene

$$\frac{3x+1}{(x+1)(x^2+1)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{1+x^2}.$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx &= \int_0^1 -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{1+x^2}\,dx \\
&= -\log|x+1| + \frac{1}{2}\log|1+x^2| + 2\arctan(x)\Big|_0^1 \\
&= \frac{\pi - \log(2)}{2}
\end{aligned}$$

3. L'equazione caratteristica è $\lambda^1 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$ ha soluzione $\lambda = -1$ con molteplicità due. Quindi l'equazione omogenea ha soluzione $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$. La soluzione particolare, non essendoci risonanza, va cercata della forma

$$y_f(x) = a\sin(x) + b\cos(x).$$

Sostituendo si trova che $a = 0$ e $b = -1/2$ e quindi alla fine le soluzioni sono

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - \frac{1}{2}\cos(x).$$

4. Applicando il teorema di Rolle negli intervalli $I_1 =]1, 2[$ e $I_2 =]2, 3[$ si ricava che esistono $x_1 \in I_1$ e $x_2 \in I_2$ tali che $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.
Applicando ora di nuovo il teorema di Rolle alla funzione $\phi(x) = f'(x)$ nell'intervallo $]x_1, x_2[$ si ricava che esiste $x_0 \in]x_1, x_2[$ tale che $\phi'(x_0) = 0$.
Ma essendo $\phi(x) = f'(x)$ si ottiene

$$\phi'(x_0) = f''(x_0) = 0.$$