Cenni di soluzione

Parte I

1. $4 \cdot 2^{1000} = 2^2 \cdot 2^{1000} = 2^{1002}$, quindi la risposta esatta non è presente. E
2. Risolvendo la disequazione $x^4 - x^3 = x^3(x-1) \geq 0$ si vede che il termine x^3 è positivo per $x > 0$ e negativo per $x < 0$, mentre $x - 1 > 0$ per $x > 1$. Da questo si ricava con lo studio del segno che la soluzione della disequazione è l'insieme $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ e quindi la risposta giusta è la C.
3. Il numero $1/\sqrt{2}$ è maggiore di zero e minore di uno. La funzione seno è positiva per $0 < x < \pi$ e si annulla per $x = 0, \pi$. In tale intervallo è strettamente crescente in per $x < \pi/2$ e decrescente per $\pi/2 < x < \pi$. Siccome il massimo vale 1 ed è assunto in $\pi/2$ per il teorema dei valori intermedi il valore $1/\sqrt{2}$ viene assunto 2 volte. A.
4. Nel limite in questione, mettendo in evidenza x^3 si ottiene
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5/x^3 + 3/x^2 + \sin(x)/x^3}{6}$$
e tutti i termini convergono a zero. C
5. Il limite è della forma $\infty - \infty$. Moltiplicando e dividendo per $(n^3 + 2n + 3)^{1/2} + (n-2)^{3/2}$ si ottiene
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-5 + 14\, n - 6\, n^2 + 2\, n^3}{(n^3 + 2n + 3)^{1/2} + (n-2)^{3/2}}$$
e si ottiene direttamente che il limite vale $+\infty$. C
6. Il modulo vale $\sqrt{3+1} = 2$, mentre l'argomento vale $\pi + \arctan(1/-\sqrt{3}) = 5\pi/6$. B.
7. La derivata vale $f'(x) = \cos(\log(x))/x$ e quindi $f'(e) = \cos(1)/e$. E.
8. La funzione è continua perchè
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 0$$
ma non è derivabile perchè
$$-\pi = \lim_{x \to 1^-} \pi \cos(\pi x) \lim_{x \to 1^-} f'(x) =\neq \lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} 2(x-1) = 0.$$
Risposta A.

Riassumendo

1 E, 2 C, 3 A, 4 C, 5 C, 6 B, 7 E, 8 A.

Parte II

1. Il limite in questione, scritto per esteso diventa

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!(n-1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{k!(n-k)!}$$

e osserviamo che $\binom{n}{k}$ è definito per $0 \leq k \leq n$. Dato che bisogna calcolare il limite per n che tende a più infinito, qualunque sia $k \in \mathbb{N}$, possiamo osservare che se $n > k$ allora

$$0 \leq \frac{n}{k!(n-k)!} \leq \frac{n}{k!(n-k)(n-k-1)}.$$

Pertanto il teorema "dei due carabinieri" implica che fissato un qualsiasi $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to+\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{(n-1)!} = 0$$

2. In questo caso il teorema di Weierstrass non è applicabile perchè l'intervallo su cui è definita la funzione non è limitato. Si tratta di capire se l'ipotesi aggiuntiva che la funzione è infinitesima per $x \to +\infty$ possa implicare l'esistenza del minimo assoluto, oppure -in alternativa- bisogna provare a fornire un controesempio, cioè una funzione con le ipotesi dell'esercizio e che non ha minimo assoluto.
Un esempio di funzione con queste proprietà è $f(x) = e^{-x}$, quindi il non sempre il minimo non esiste nelle ipotesi dell esercizio.

3. La derivata in questione si calcola in questo modo, per $x > 0$

$$x^x = e^{\log(x^x)} = e^{x\log(x)}$$

e quindi

$$\frac{d}{dx}x^x = \frac{d}{dx}e^{x\log(x)} = e^{x\log(x)}\big(\log(x) + \frac{x}{x}\big) = x^x(\log(x) + 1).$$

Si osservi che la derivata in questione non vale $x\,x^{x-1}$ come si otterrebbe applicando *erroneamente* la regola di derivazione $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, che vale per α fissato.