Esistenza dell'estremo superiore

Assioma di continuità. *Data una successione* $\{I_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ *di "intervalli inscatolati", cioè per ogni* $k \in \mathbf{N}$ *valgono le seguenti*

i) $I_k = [a_k, b_k]$ *è un intervallo chiuso*

ii) $I_{k+1} \subseteq I_k$

iii) $|I_{k+1}| \le \dfrac{|I_k|}{2}$ *con* $|I_k| = b_k - a_k$.

Allora esiste ***uno e uno solo*** $\overline{x} \in \mathbf{R}$ *che appartiene a tutti gli intervalli, cioè* $\overline{x} \in \cap_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k]$ *o anche*

$$a_k \le \overline{x} \le b_k \qquad \forall\, k \in \mathbf{N}.$$

Teorema.[Sull'esistenza dell'estremo superiore] *Un insieme* $A \subset \mathbf{R}$ *non vuoto e limitato superiormente ha estremo superiore.*

Dimostrazione: Essendo A limitato superiormente esiste almeno un maggiorante b_1. Siccome $A \neq \emptyset$ esiste $a_1 \in \mathbf{R}$ (non necessariamente appartenente ad A) che non è maggiorante. Per esempio, fissato $a \in A$, il numero $a - \sqrt{2}$ non è un maggiorante. Abbiamo dunque l'intervallo $[a_1, b_1]$ con la proprietà che a_1 non è maggiorante, mentre b_1 è maggiorante.

Costruiamo ora successione di intervalli inscatolati come segue. Dato l'intervallo $[a_k, b_k]$ con a_k che non è maggiorante per A e con b_k maggiorante di A, consideriamo il punto di mezzo $c = \frac{a_k+b_k}{2}$ e

a) se c è un maggiorante per A poniamo $a_{k+1} = a_k$ e $b_{k+1} = c$;

b) se invece c non è un maggiorante poniamo $a_{k+1} = c$ e $b_{k+1} = b_k$.

Per l'assioma di continuità, l'intersezione di tutti questi intervalli è costituita da un solo numero $\Lambda \in \mathbf{R}$. Tale numero è l'estremo superiore di A. Verifichiamo infatti che le seguenti due proprietà sono soddisfatte:

- **Il numero Λ è un maggiorante.** Se il numero $\Lambda \in \mathbf{R}$ non fosse un maggiorante, allora esisterebbe almeno un $x \in A$ con $\Lambda < x$. Poichè per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha $a_k \le \Lambda$, ne seguirebbe che

  $$a_k \le \Lambda < x.$$

  Inoltre $x \le b_k$ per ogni $k \in \mathbf{N}$ perchè per costruzione b_k è maggiorante e $x \in A$.

  Ne segue allora che $x \in [a_k, b_k]$ per ogni $k \in \mathbf{N}$ e quindi necessariamente

  $$x = \Lambda,$$

  da cui un assurdo.

- **Nessun numero minore di Λ è un maggiorante.** Supponiamo per assurdo che ci sia un altro maggiorante $\mu \in \mathbf{R}$ e $\mu < \Lambda$. Siccome per costruzione tutti i b_k soddisfano $\Lambda \leq b_k$ si avrà

$$\mu < \Lambda \leq b_k.$$

Inoltre, siccome $\mu \in \mathbf{R}$ è maggiorante, mentre nessuno degli a_k lo è si avrà anche

$$a_k \leq \mu.$$

(Infatti, visto che a_k non è un maggiorante, fissato $k \in \mathbf{N}$ esiste almeno un numero $\overline{a}_k \in A$ tale che $a_k < \overline{a}_k \leq \mu$, visto che $\mu \geq a \; \forall \, a \in A$). Segue pertanto che

$$a_k \leq \mu \leq b_k \qquad \forall \, k \in \mathbf{N}$$

e quindi per l'assioma di continuità si avrebbe l'assurdo $\mu = \Lambda$.