Cenni di calcolo combinatorio

Calcolo delle disposizioni semplici di n elementi a k a k. Supponiamo di avere due insiemi finiti A e B con

$$1 \leq \#A = k \leq n = \#B$$

e vogliamo calcolare il numero di funzioni iniettive con dominio A e codominio B. Indichiamo tale numero con il simbolo

$$D_{n,k}.$$

Se $k = 1$ abbiamo n funzioni infatti l'unico elemento di A può essere associato a ciascuno degli n elementi di B.

Supponiamo ora di conoscere $D_{n,k-1}$ e da esso calcoliamo $D_{n,k}$. Fissato $A' \subset A$ un sottoinsieme con $k-1$ elementi, ci sono $D_{n,k-1}$ funzioni iniettive $f : A' \to B$ e ciascuna ha come immagine un sottoinsieme di B con $k-1$ elementi. Da ciascuna di queste si ottengono $(n-k+1) \cdot D_{n,k-1}$ funzioni iniettive associando al restante elemento di A uno dei restanti $n-(k-1)$ elementi di B. Pertanto

$$D_{n,k} = D_{n,k-1} \cdot (n-k+1).$$

Con facili calcoli si ottiene che

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ \cdot \ (n-k+2) \cdot (n-k+1)$$

Per dimostrare l'ultima affermazione, osserviamo che moltiplicando le uguaglianze

$$\begin{array}{ccl}
D_{n,1} & = & n \\
D_{n,2} & = & (n-1) \cdot D_{n,1} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
D_{n,k-1} & = & (n-k+2) \cdot D_{n,k-2} \\
D_{n,k} & = & (n-k+1) \cdot D_{n,k-1}
\end{array}$$

si ottiene

$$D_{n,1} \cdot D_{n,1} \cdots D_{n,k-1} \cdot D_{n,k} = n(n-1) \cdots (n-k+1) D_{n,1} \cdot D_{n,1} \cdots D_{n,k-1},$$

da cui la tesi.

Calcolo delle permutazioni di un insieme di n elementi Dato un insieme di n elementi, le applicazioni iniettive da A in A (che corrispondono a permutare gli elementi di A) si calcolano ponendo $k = n$ nella precedente formula e quindi

$$P_n = D_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 2 \cdot 1 := n!$$

Calcolo delle disposizioni con ripetizione di n elementi k a k. Calcoliamo ora $F_{n,k}$ il numero di *tutte* le funzioni $f : A \to B$ con $\#A = k$ e $\#B = n$. Non richiedendo la iniettività non è necessario supporre $k \leq n$. Il primo elemento di A può essere fatto corrispondere a ogni elemento di B, con n-scelte possibili. Per il secondo elemento di A vale lo stesso ragionamento e così via. Alla fine iterando per k volte si ottiene

$$F_{n,k} = n^k.$$

Calcolo delle combinazioni senza ripetizioni di n elementi k a k. Calcoliamo $F_{n,k}$ il numero di sottoinsiemi (distinti) di k elementi che si possono formare a partire da un insieme di n elementi. Osserviamo che se $k = 0$ c'è solo l'insieme vuoto, quindi

$$C_{n,0} = 1.$$

Inoltre, per $k = 1$ ci sono n sottoinsiemi distinti, ognuno formato da un diverso elemento di A. Supponendo ora $1 < k \leq n$ osserviamo che da ogni sottoinsieme di A con $(k-1)$ elementi, si ottengono $(n-k+1)$ sottoinsieme con k elementi, mediante l'aggiunta di uno dei rimanenti elementi di A. In questo modo si generano tutti i sottoinsiemi di A con k elementi, ma ognuno è contato k volte. Infatti esso si ottiene in k modi diversi aggiungendo un elemento di A agli altri $k-1$. Pertanto vale la relazione

$$C_{n,k} = \frac{n-k+1}{k} C_{n.k-1}.$$

Ne segue che

$$C_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)}{k!} := \binom{n}{k}$$

dove, per definizione,

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!\,k!},$$

con la convenzione che $0! = 1$.