

Introduzione alle note sintetiche sui numeri reali¹.

Placido Longo

28 dicembre 2005

¹Bozza n.1

Capitolo 1

Perché non usare solo le frazioni?

Si impara da bambini ad usare le frazioni. Si impara cosa siano numeratore e denominatore, come moltiplicarle (facilmente) e come sommarle (in modo più laborioso).

Per farsi un'idea precisa sull'importanza del calcolo delle frazioni, si deve pensare, più che alla divisione delle torte, a quella delle eredità.

I numeri razionali, strettamente legati ma distinti dalle frazioni, vengono definiti tenendo conto del fatto che frazioni distinte possono avere lo stesso “valore” e cioè corrispondere allo stesso numero: $1/1$, $2/2$, $7/7$ rappresentano tutte il totale dell'eredità. Ciò accade se una frazione può essere ottenuta dall'altra moltiplicandone i termini per uno stesso fattore.

Introducendo i razionali relativi, che ereditano il concetto di debito e credito già formalizzato in epoca rinascimentale in ambiente finanziario, si ottiene un insieme di numeri dotato delle seguenti proprietà, *summa* dell'aritmetica e dell'algebra antica.

- Proprietà di campo:

Per ogni coppia di numeri a e b è definito un numero $a + b$ ed uno ab che soddisfano:

- Proprietà commutativa:

$$a + b = b + a \quad ab = ba$$

e cioè il risultato di somma e prodotto non dipende dall'ordine dei termini dell'operazione.

- Proprietà associativa

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad a(bc) = (ab)c$$

e dunque la somma di tre addendi o il prodotto di tre fattori ha un valore univoco, indipendente dall'ordine d'esecuzione delle operazioni. Siamo talmente abituati a ciò da dimenticare che differenza, quoziente e potenza non godono di tale proprietà: $2 : 2 : 2$ fa $1/2$ o 2 a seconda di quale delle due divisioni venga eseguita per prima.

- Esistenza dell'elemento neutro. Esistono due numeri, denotati con 0 ed 1 , verificanti:

$$0 + a = a \quad 1 a = a$$

Da bambini, ci si accorge subito che ciò rende semplifica molto l'imparare la tabellina dell'uno, ma il risvolto più interessante viene dall'algebra, associato alla proprietà seguente:

- Esistenza dell'inverso. Per ogni a , esiste un elemento, denotato con $-a$ tale che

$$a + (-a) = 0$$

Prima di passare al prodotto, osserviamo che esistenza di elemento neutro per la somma e di "opposto" di un elemento consente di portare all'altro membro un addendo in un'equazione. Infatti se

$$\dots + a = \dots$$

sommando ad ambo i membri l'opposto di a , e applicando le proprietà commutativa e associativa per riordinare la somma si ottiene

$$\dots + a - a = \dots - a$$

e cioè

$$\dots + 0 = \dots - a$$

dalla proprietà dell'elemento neutro ne segue allora la regola nota del trasporto con cambio di segno.

Altrettanto vitale è l'esistenza dell'elemento inverso per il prodotto. Per ogni $a \neq 0$ esiste un elemento, denotato con a^{-1} , tale che

$$a a^{-1} = 1$$

Ciò permette di portare all'altro membro di un'equazione un fattore non nullo, moltiplicandone ambo i membri per il reciproco. In sostanza, si possono risolvere tutte le equazioni di primo grado dove l'incognita appaia davvero.

- Proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma. Davvero è più lungo il titolo del contenuto: asserisce "solo" che si può mettere in evidenza un fattore comune in una somma di prodotti, e cioè:

$$a b + a c = a (b + c)$$

Ci sono conseguenze dirette di tali proprietà che sono fondamentali:

- Per ogni a si ha $a 0 = 0$. $(a 0 = a (b - b) = a b - a b = 0)$

- Legge d'annullamento del prodotto:
 $ab = 0$ se e solo se o $a = 0$ oppure $b = 0$.
 (Se $a \neq 0$ allora moltiplicando per a^{-1} e utilizzando la proprietà precedente risulta $b = 0$).
 È bene ricordare che da tale legge dipende la possibilità di risolvere, o quanto meno di semplificare, ogni equazione del tipo

$$f(x)g(x) = 0$$

che è risolta da ogni x per cui o $f(x) = 0$ oppure $g(x) = 0$

Gli assiomi di campo, o di corpo commutativo, presentano in modo sintetico tutte le proprietà costitutive dei numeri, ed in particolare quelle necessarie all'algebra delle equazioni di primo grado. Vedremo fra un momento che passare a quelle di secondo grado sarà costosissimo. Per ora osserviamo che i numeri razionali, ottenuti identificando le frazioni equivalenti, definendo fra di essi le operazioni attraverso quelle consuete fra arbitrarie frazioni che li rappresentano, e dimostrando che il risultato non dipende dalle frazioni scelte, godono di tutte queste proprietà e sarebbero perfettamente adeguati all'esigenze dell'algebra delle equazioni, quantomeno di quelle di primo grado.

Ma c'è di più! Vanno benissimo anche per le disequazioni!

- Proprietà di campo ordinato. Fra i numeri si può definire una relazione di disuguaglianza $a \leq b$ verificante:

- $a \leq a$
- Se $a \leq b$ e $b \leq a$ allora $a = b$
- Se $a \leq b$ e $b \leq c$ allora $a \leq c$

- Se $a \leq b$ allora $a + c \leq b + c$
- Se $0 \leq c$ e $a \leq b$ allora $ac \leq bc$

Le prime tre proprietà sono quelle caratteristiche della disuguaglianza, mentre le altre due ne definiscono il comportamento nei riguardi delle operazioni algebriche: in sostanza, quelle che descrivono le regole per manipolare le disequazioni: si può spostare un addendo da un membro all'altro senza alterare il verso della disuguaglianza, così come si può moltiplicare ambo i membri per un numero POSITIVO.

Per pura curiosità, verifichiamo che moltiplicandoli per un numero negativo il verso si inverte.

Infatti, da $0 \leq a$ sommando ad ambo i membri $-a$ ne segue subito $-a \leq 0$ (non è una gran novità, ma è conseguenza delle sole proprietà prima enunciate. Un'altra "ovvietà" da dimostrare è che $(-c)a = -(ca)$ ($(-c)a + ca = a(\dots)$). Infine, se $c \leq 0$ allora $0 \leq -c$ da cui $(-c)a \leq (-c)b$ e $-ca \leq -cb$ ed infine $bc \leq ac$.

Ricordiamo che fattorizzare il primo membro di una disequazione conviene: $f(x)g(x) \leq 0$ è risolta da tutti gli x per cui o $f(x) \leq 0$ e $g(x) \geq 0$ oppure per cui $f(x) \geq 0$ e $g(x) \leq 0$.

Perché dunque abbandonare i sicuri lidi delle frazioni per affrontare le acque tempestose dei numeri reali? Il tallone d'Achille dell'insieme dei numeri razionali si manifestò già nell'antichità ed in modo impressionante, in alcune questioni strettamente correlate alla risoluzione di equazioni di secondo grado.

Esistenza della radice quadrata Dato un numero a , esiste un numero razionale $b = m/n$ tale che $b^2 = a$?

Esistenza di intersezioni fra rette e curve La retta $y = a$ e la parabola $y = x^2$ hanno punti a comune?

Prima di andare avanti, ricordiamo che la risposta della matematica greca allo “scandalo” delle lunghezze incommensurabili, delle quali diremo fra poco, fu drammatica: visto che il problema della radice quadrata è insolubile nei razionali ed è risolubile geometricamente, i Greci si volsero alla Geometria come unico motore di ricerca matematica: persino nel mirabile studio sui numeri primi di Euclide non si parla di numeri interi, ma di segmenti multipli di un altro. Le soluzioni geometriche, o sintetiche, hanno avuto i loro famosi naufragi, come la duplicazione del cubo, la trisezione dell'angolo – che riguardano entrambi l'esistenza della radice cubica – e quello tanto celebre da entrare nel linguaggio comune come archetipo di problema insolubile: la quadratura del cerchio. Nonostante ciò, la Scienza delle Costruzioni dei primi decenni del secolo passato considerava ancora le costruzioni di Statica Grafica come una più valida alternativa ai calcoli analitici, che erano eseguiti non ancora al computer, ma a mano, con il regolo calcolatore o con le tavole dei logaritmi! Quando l'autore era studente, negli anni '70, la cattedra di Analisi Numerica si chiamava ancora “Calcoli Numerici, Grafici ed Elettronici”, e il lettore è invitato a porre mente all'ordine fra grafici ed elettronici, che ancora sopravviveva dal passato.

Perché non esistono razionali il cui quadrato è 2?

Perché se ne esistesse uno, ridotto ai minimi termini si potrebbe scrivere nella forma m/n , con m ed n privi di fattori comuni. Allora $m^2/n^2 = 2$ da cui $m^2 = 2n^2$ e dunque m^2 è pari. Poiché m ed m^2 hanno gli stessi fattori primi, anche m è pari, ed allora sarà $m = 2k$ per qualche opportuno k intero. Dunque, sostituendo nell'equazione precedente se ne ricava $4k^2 = 2n^2$ da cui n^2 , e di conseguenza anche n , è pari, contro l'ipotesi che non avesse fattori comuni con m .

Condanna a morte dei razionali, senza appello? Forse sì.

In realtà, esiste un secondo filone di sviluppo, più recente seppur vetusto anch'esso, che prende le mosse da uno dei più celebri contributi di Euclide alla storia della matematica: l'algoritmo di divisione con resto.

Nella già citata parte degli “Elementi” dedicata ai numeri primi, Euclide presenta l'algoritmo di divisione per sottrazioni successive che (quasi) tutti noi abbiamo imparato da bambini a scuola: dal dividendo m si sottrae il divisore n tante volte finché il resto non sia minore del divisore. Detto q il numero di

volte, risulta $m = nq + r$ con $r < n$.

Già da piccoli ci si abitua al fatto che r non è sempre nullo, con la sgradevole conseguenza che non sempre la divisione risulta “esatta”. La soluzione dell’algebra è radicale: la divisione “impossibile” non si esegue, ma genera essa stessa un numero nuovo, la frazione corrispondente, che per definizione è uguale al quoziente da calcolare. L’altra soluzione è quella di introdurre la virgola: completare la divisione e aggiungere tre zeri in fondo vuol dire ottenere un risultato con tre cifre decimali. Non è detto che il resto sia nullo, ma l’algoritmo modificato con la virgola fornirà il più grosso numero a tre cifre che moltiplicato per il divisore dà un risultato minore o uguale al dividendo: aumentando di un’unità l’ultima cifra, il prodotto supererà il dividendo. L’intervallo individuato da tali valori “localizza” il quoziente “esatto” attraverso una stima per difetto e una per eccesso.

La differenza sostanziale è che, invece di determinare esattamente la soluzione, se ne accetta una stima, una “soluzione approssimata” che dista da quella esatta meno di una quantità prefissata a piacere, che nel caso della divisione vale 10^{-n} ove n è il numero delle cifre, e cioè degli zeri aggiunti.

Lo stesso ragionamento consente di costruire algoritmi, più o meno efficienti, per l’estrazione della radice n -esima di un numero positivo: si può, persino per tentativi, determinare il più grande numero a due, tre, dieci o tredicimiladuecentotré cifre il cui cubo sia minore o uguale a 3. Per esempio, con un congruo numero di tentativi si scopre che $1.44^3 = 2.985984 < 3$, mentre $1.45^3 = 3.048625 > 3$. Il valore approssimato per difetto di $\sqrt[3]{3}$ è 1.44, e il valore esatto dista da esso meno di 10^{-2} .

Una versione del metodo piuttosto efficiente, è costituita dal “metodo della forcilla” dell’artigliere, che in Analisi Matematica si chiama metodo di bisezione, e che riecheggia il vecchio argomento di Zenone di Elea contro il moto: quello di Achille e la tartaruga.

Si determinano per tentativi due numeri, uno minore e uno maggiore di quello cercato: nel caso dell’artigliere sono un colpo “corto”, a distanza minore, e uno “lungo”, più distante del bersaglio. Nel caso si volesse calcolare la radice cubica di 3, il colpo “corto” potrebbe essere 1, perché $1^3 = 1 \leq 3$ mentre il colpo “lungo” potrebbe essere 2 perché $2^3 = 8 > 3$.

Trovato un primo intervallo che localizzi grossolanamente il valore corretto, il metodo di bisezione consiste nell’esaminarne il punto medio e decidere quale dei due semintervalli localizzi il valore esatto. Nell’esempio di prima, il punto medio fra 1 e 2 è 1.5. Poiché $1.5^3 = 3.375 > 3$, ne segue che la radice cubica di 3 sarà fra 1 e 1.5. Continuando, il punto medio vale ora 1.25. Poiché $1.25^3 = 1.953125 \leq 3$ ne segue che $\sqrt[3]{3}$ è compresa fra 1.25 e 1.5. Si può andare avanti finché si vuole: si può essere (MOLTO) fortunati e trovare la soluzione esatta, o continuare a determinare soluzioni approssimate sempre migliori, nel senso che la loro distanza massima da quella esatta si dimezza ad ogni passo, e diventa meno di un decimo (un sedicesimo, in realtà) ogni quattro passi.

Il metodo illustrato ha un illustre predecessore: il procedimento di misura di un segmento. Misurare un segmento con un altro è in tutto e per tutto simile alla divisione di due numeri: si sottrae l’unità dal segmento da misurare finché il resto non sia minore di essa; poi si divide l’unità in dieci (o dodici, o sessanta, o due!) parti eguali e si ripete il processo usando il sottomultiplo come nuova

unità, ottenendo ogni volta un errore massimo di misura pari al segmento adoperato per misurare. Supponiamo di voler misurare la diagonale di un quadrato utilizzando come unità il suo lato. Dal teorema di Pitagora otteniamo che il quadrato costruito su di essa deve avere area 2. Sappiamo già cosa accadrà! Non ci sono razionali, e quindi frazioni, il cui quadrato vale 2 e quindi qualunque sia il numero di parti eguali in cui viene divisa l'unità, il procedimento di misura non fornirà un valore esatto: se lo facesse, la diagonale sarebbe un multiplo intero (esatto) di un sottomultiplo del lato, e la misura sarebbe razionale.

La teoria dei numeri reali qui di seguito presentata seguirà questa linea di ragionamento: un numero reale sarà addirittura definito a meno di un'approssimazione. Esistono altre vie, ma questa è più vicina allo spirito della fisica, delle altre scienze naturali, della tecnica.

C'è anche una vendetta postuma dell'algebra: i numeri complessi, che soli permettono una soluzione completa del problema della radice, sono definiti in modo "algebrico", come coppie di reali: niente approssimazione! Comunque, esulano dallo scopo di queste pagine.

Capitolo 2

Serie decimali e numeri reali.

Il problema di misurare segmenti arbitrari sorge spontaneamente non appena si vuole introdurre un sistema di coordinate su di una retta: fissata la retta, scelto l'origine, presa una decisione su quale delle due semirette debba avere attribuito il segno positivo, resta da introdurre un'unità di misura, cioè un segmento arbitrario, ed associare ad ogni punto della retta la misura (con segno) del segmento di retta staccato dal punto stesso e dall'origine. Per esempio, si può costruire un quadrato di lato 1, cioè lungo quanto l'unità, riportare col compasso la sua diagonale sulla retta e porsi la domanda su quale sia la coordinata di quel punto. La risposta è $\sqrt{2}$, che non è razionale, ma che può essere costruito rapidamente con riga e compasso come diagonale di un quadrato. Il teorema di Euclide sui triangoli rettangoli fornisce una via per "calcolare" graficamente una qualunque radice quadrata, ma le cose cambiano drasticamente se si volesse calcolare anche solo una radice cubica: non esistono metodi geometrici per determinare una radice cubica e quindi l'oracolo di Apollo, che prescriveva ai Greci di costruirgli un altare cubico due volte più grande (duplicazione del cubo) era destinato a restare senza soluzione.

Cosa accade con l'approssimazione? Non si riesce più a determinare la posizione esattamente, ma si può localizzarla con precisione arbitraria. Gli algoritmi precedenti per calcolare la radice forniscono un numero decimale a n cifre approssimante per difetto e quello "seguito" approssimante per eccesso il valore esatto, CHE RESTA SCONOSCIUTO.

Mentre il terribile problema della quadratura del cerchio resta insolubile se si richiede di determinare una costruzione geometrica che produca come risultato un quadrato della stessa area del cerchio dato, come provò Lindemann solo nell'Ottocento, diventa facilmente "risolvibile" approssimando l'area del cerchio per difetto e per eccesso usando quelle dei poligoni (regolari, ad esempio) inscritti e circoscritti, metodo già proposto da Antifonte e Brisone per "risolverlo" con conseguenti (giusti) fulmini di Aristotele. L'idea di far aumentare il numero dei lati per calcolare con maggior precisione – il Metodo di Esaustione di Eudosso – contiene già *in nuce* l'idea dell'integrale e quella del limite, ed ebbe il suo trionfo con i calcoli di Archimede della quadratura del segmento di parabola, identificata "al limite" come $2/3$ di quella del rettangolo circoscritto e quella del

cerchio, che fu solo stimata come compresa fra 3.14 e 3.15.

Se dunque per la geometria euclidea classica numero voleva dire segmento costruibile (con riga e compasso), per Archimede qualcosa era già cambiato, o quantomeno stava cambiando.

Cosa accade se si continua all'infinito il processo di misura? Bah! Non si capisce bene neanche ciò che vuol dire! Una cosa però si capisce, ed è essenziale per un ingegnere: la precisione con la quale bisogna effettuare i calcoli non è questione di gusto: è questione di necessità e di danari! Non avrebbe senso esprimere in centesimi di millimetro la misura di una trave in cemento armato, che nessun carpentiere sarebbe in grado di armare; così non avrebbe senso esprimere con errori dell'ordine del centimetro le misure di un pistone o di un cilindro di un motore di un'auto. È il committente, e la sua disponibilità a spendere, a determinare quante cifre decimali occorre inserire nei propri calcoli: è evidente che continuare all'infinito significa null'altro che svuotare il mare con un guscio di noce. Ci si deve di necessità fermare, ma non è noto, *a priori*, quale sia il numero giusto per le cifre, che va adeguato al problema in esame. Gli astronomi, da sempre fra i più esigenti, utilizzavano regoli calcolatori lunghissimi e tavole dei logaritmi a moltissime cifre. Se bisogna calcolare un'orbita di una capsula abitata, e sbagliare l'angolo di incidenza con l'atmosfera comporta la combustione della capsula e del suo contenuto umano oppure il suo rimbalzo con conseguente perdita del "carico" nello spazio profondo, si capisce come sia meglio fare molto bene i calcoli, con tante, tante cifre. Visto che gli astronomi sono riusciti a scoprire Nettuno e Plutone solo studiando le "stranezze" delle orbite di Urano e Nettuno rispettivamente, ciò vuol dire certo che Newton è stato un grandissimo, ma anche che loro hanno fatto i conti con molta pazienza e molte cifre di π .

Prima di entrare in argomento è opportuno riflettere su un'abitudine dei fisici: è possibile, sfogliando un libro, trovare una misura espressa così: 10.120000. Anche i bambini sanno che gli zeri finali dopo la virgola sono superflui, e la necessità del formato fisso non sarebbe una buona ragione neanche fra i (molti) fisici amanti del FORTRAN. Perché persone di buon senso usano una notazione tanto ridondante? Perché non è affatto ridondante!!! Il valore 10.210000 non vuol dire SOLO che la misura vale esattamente 10.12, se non altro perché non esistono misure esatte (per almeno un paio di ottime ragioni, una statistica e una quantistica)! Il valore precedente dice che la misura vale sì 10.12, ma dice ANCHE che l'errore del processo di misura è minore di 10^{-6} . Scrivendo 10.12 il valore misurato è lo stesso, ma l'errore di misura è ora 10^{-2} ! Sarebbe come confrontare una misura fatta con il calibro Palmer, quello a forma di G con la vite graduata, preciso al centesimo di millimetro, con una misura interferometrica di molti ordini di grandezza più precisa: stesso valore, ma strumenti diversi, con procedure di misura e costi diversi.

Insomma, scrivere π con due, cinque o venti cifre decimali vuol dire anche impegnarsi a misurare tutte le grandezze in gioco con uguale precisione: che senso avrebbe chiedere una resistenza di 1234.56 Ω al 10% di tolleranza? Il 10% di 1234.56 vale 123.456 e dunque la resistenza acquistata può essere da 1214, 1303, 1275, 1351 Ω ! Perché affannarsi con tanti decimali? Ha invece senso, ed un costo piuttosto robusto, chiedere una identica resistenza con tolleranza del centesimo di Ohm: lì i decimali diventano davvero significativi.

2.1 Serie decimali

Un risultato molto elegante del calcolo differenziale, per l'esattezza conseguenza della formula di Taylor, e che

$$e = 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + \dots + 1/n! + \epsilon$$

dove

$$|\epsilon| \leq 3/(n+1)!$$

e

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Aldilà dei modi più o meno furbi per calcolare la somma indicata, ci sono diverse buone notizie: l'errore ϵ diventa piccolo molto rapidamente al crescere di n , e la somma di frazioni è complicata sì, ma razionale. L'elegante formula precedente fornisce un algoritmo che permette di costruire un razionale arbitrariamente vicino ad e : la considereremo il prototipo di numero reale. L'idea è che un numero reale può essere definito solo a meno di un'approssimazione, che però può essere resa arbitrariamente piccola.

La definizione proposta nel seguito è in realtà leggermente diversa, e ciò in ossequio alle consuetudini oramai millenarie nell'eseguire i calcoli utilizzando la notazione decimale con la virgola: calcolatrici tascabili e programmi di calcolo matematico per la massima parte lo fanno e, anche a prezzo di qualche bizzarria piuttosto noiosa, ciò non costituisce un problema.

Torniamo alla misura della diagonale di un quadrato unitario. Se si decide di dividere sempre per dieci il segmento usato al passo precedente per misurare, si otterranno come intervalli localizzanti $\sqrt{2}$ i seguenti:

$$[1, 2] \quad [1.4, 1.5] \quad [1.41, 1.42] \quad \dots\dots$$

Gli estremi sinistri sono i più grandi numeri rispettivamente interi, decimali ad una cifra, decimali a due cifre e così via tali che il loro quadrato sia minore o eguale a 2. Gli estremi destri, ottenuti da quelli sinistri incrementandone di un'unità l'ultima cifra, sono i più piccoli interi, decimali ad una cifra, decimali a due cifre e così via, il quadrato dei quali sia strettamente maggiore di 2. Si possono ottenere misurando la diagonale, oppure con il bizzarro algoritmo per la radice quadrata imparato a scuola (basato sullo sviluppo del quadrato di un binomio), o ancora per tentativi, o infine per bisezione.

Il modo più semplice per scrivere o per abbreviare tutto ciò è di usare una serie decimale:

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117

Chiunque può interrogare su quale sia la cifra di posto 1003243581-esimo o 10^{16} -esimo, e chi dichiara di conoscere il numero reale π ha l'obbligo di sapere come calcolarla. Per ottenere le cifre precedenti è stato usato il programma bc, reperibile sulle macchine UNIX & Co. ;

digitare: `bc -l`
subito dopo il benvenuto, digitare: `scale=200`
che fissa il numero di cifre (200) delle troncate e infine digitare: `4*a(1)`
che stampa quattro volte l'arcotangente di 1. Per saperne di più su bc basta
ottenere l'accesso ad una macchina linux, freebsd, netbsd, openbsd, o (credo)
aprire un terminale sotto un recente MacOS (basato su un *bsd chiamato Dar-
win) e digitare:

`man bc`

Apparirà il manuale di comandi, variabili, cicli, definizioni di funzioni, e quasi
ogni accessorio desiderabile (se si può fare a meno di classi e programmazione
ad oggetti!), con qualche esempio svolto (pochi). Occupa pochissimo spazio e
di solito è già installato.

Con la millenaria convenzione che ogni cifra vale dieci volte la successiva si pos-
sono scrivere al volo gli intervalli che localizzano π :

[3.1415926535 , 3.1415926536]

è l'intervallo contenente π di ampiezza 10^{-10} , mentre

[3.1415926535897932384626 , 3.1415926535897932384627]

è quello di ampiezza 10^{-22} .

L'uso delle troncate per la definizione, il confronto, e le operazioni sui reali sarà
l'oggetto principale delle note che seguono.