Note sulle equazioni differenziali

13 gennaio 2020

Queste note (molto) informali per il corso di "Matematica" raccolgono alcuni tra i risultati più importanti relativi alle *equazioni differenziali ordinarie*[1].

1 Generalità sulle equazioni differenziali ordinarie

Definizione 1. Si chiama *equazione differenziale ordinaria di grado n ($1 \leq n \in \mathbb{N}$)* un'equazione del tipo

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) = 0, \tag{1}$$

dove $y^{(k)}$ indica la derivata k-esima, mentre $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua. L'incognita in questo caso è la funzione $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (funzione reale di variabile reale) che dipende dalla variabile x.

Osservazione 1. Spesso -in relazione anche alle applicazioni della fisica- la variabile indipendente x viene anche sostituita con t (tempo), l'incognita $y(t)$ viene sostituita con $x(t)$ e l'equazione diventa $F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t), x^{(n)}(t)) = 0$. Dal contesto sarà comunque chiaro qual è la funzione incognita e qual è la variabile indipendente. Inoltre si possono anche trovare le derivate indicate con la notazione di Newton: $x(t)$, $\dot{x}(t)$ ...

Definizione 2. Si chiama *problema di Cauchy* l'insieme di un'equazione differenziale di grado n e di n "condizioni iniziali"

$$\left\{ \begin{array}{rcl} F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) & = & 0 \\ y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y_1 \\ \vdots & & \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) & = & y_{n-1}. \end{array} \right. \tag{2}$$

Il punto $x_0 \in \mathbb{R}$ viene chiamato *punto iniziale*, mentre le $y_i \in \mathbb{R}$, i *valori iniziali*, sono i valori di $y(x)$, e di tutte le sue derivate fino al grado $n-1$, nel punto x_0.

Per fare un primo esempio elementare consideriamo l'equazione del I$^{\text{o}}$ grado

$$y'(x) = f(x) \tag{ESEMPIO 1}$$

e dalle ipotesi che stiamo assumendo fino dall'inizio f è una funzione continua, quindi integrabile secondo Riemann. L'equazione (ESEMPIO 1) può essere risolta mediante integrazione (o quadratura come era chiamata anticamente) e dal corso di analisi sappiamo che ogni primitiva della funzione f risolve la (ESEMPIO 1). Per identificare una soluzione (tra le infinite che l'equazione (ESEMPIO 1) ha) bisogna quindi assegnare per esempio il valore che la funzione incognita assume in un punto:

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0. \end{array} \right. \tag{ESEMPIO 2}$$

[1]Si chiamano *ordinarie* per distinguerle da quelle *alle derivate parziali*, che hanno come incognita una funzione non di una sola variabile reale, ma di più variabili reali.

In questo caso l'unica soluzione è data da

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

Si vede da questo esempio che un'equazione differenziale del I$^{\underline{o}}$ grado (quindi in cui al massimo è presente solo la derivata prima della funzione incognita) richiede una condizione iniziale, si può quindi intuire che un'equazione che includa derivate fino al grado n avrà bisogno di n condizioni iniziali.

Un'ulteriore osservazione è la seguente: se y risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{ESEMPIO 3}$$

una volta che viene fissato il valore y_0 che deve assumere la soluzione nel punto x_0, in realtà è automaticamente fissato anche il valore della derivata di y in tal punto. Infatti, dall'equazione e dalla condizione iniziale ricaviamo che

$$y'(x_0) = y'(x)_{|x=x_0} = f(x, y(x))_{|x=x_0} = f(x_0, y_0)$$

Con un minimo di conoscenze di Analisi Matematica II (derivate parziali) si può far vedere che se f è regolare (per potere effettuare le derivate parziali successive), allora tutte le derivate della y, almeno nel punto x_0, sono automaticamente determinate e calcolabili, una volta che è fissato il valore y_0.

Abbiamo parlato de "la soluzione del problema di Cauchy" e, anche se una discussione porterebbe molto lontano, possiamo affermare che "assumendo ipotesi ragionevoli" sulla funzione F (vedi per esempio qualsiasi libro di Analisi Matematica II, teorema di Cauchy-Lipschitz-Picard) il problema di Cauchy (2) ammette soluzione unica, almeno in un intorno del punto x_0.

Definizione 3. Si chiama *soluzione* del problema di Cauchy (2) una funzione y di classe C^n (continua e con tutte le derivate fino al grado n continue) che soddisfa la (2). Inoltre la y deve essere definita su di un intervallo $]a, b[$, tale che $x_0 \in]a, b[$; l'intervallo $]a, b[$ può eventualmente essere non-limitato, ma non chiameremo soluzione una funzione che pur soddisfacendo a tutte le condizioni in (2) sia definita su insiemi diversi da un intervallo contenente il punto x_0.

Noi considereremo solo equazioni in <u>forma normale</u>, cioè tali che la derivata di grado massimo può essere esplicitata. Tali equazioni si possono scrivere, invece che nella forma (1), nella forma

$$y^{(n)}(x) = \mathcal{F}(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-2)}(x), y^{(n-1)}(x))$$

con $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione continua. Ogni equazione di grado n in forma normale può essere trasformata in un sistema del I$^{\underline{o}}$ grado con n equazioni, cioè in un'equazione del I$^{\underline{o}}$ grado la cui incognita è un vettore con n componenti. Infatti, definiamo (per $x \in \mathbb{R}$) il vettore $\vec{z}(x) \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{z}(x) = \begin{pmatrix} z_0(x) \\ z_1(x) \\ \vdots \\ z_{n-2}(x) \\ z_{n-1}(x) \end{pmatrix} \overset{def}{=} \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(x) \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix},$$

cioè abbiamo definito una funzione[2] $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e consideriamo che su di essa la derivata agisca termine a termine. Si ottiene dunque

$$\frac{d\vec{z}(x)}{dx} = \begin{pmatrix} z_0'(x) \\ z_1'(x) \\ \vdots \\ z_{n-2}'(x) \\ z_{n-1}'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \\ y^{(n)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_{n-1}(x) \\ \mathcal{F}(x, z_1(x), \ldots, z_{(n-2)}(x), z_{(n-1)}(x)) \end{pmatrix} \overset{def}{=} \vec{\mathsf{F}}(x, \vec{z}(x)).$$

[2]Una funzione $\vec{z} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è quella che viene chiamata una *curva*. Se $n = 2, 3$ corrisponde (più o meno) all'idea intuitiva di curva. Si pensi per esempio alla funzione $z(t) = (\cos(t), \sin(t))$, con $t \in \mathbb{R}$.

Per esercizio si provi a tradurre l'equazione di II$^\underline{o}$ grado $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$ (Equazione dell'oscillatore armonico) in un sistema di due equazioni del I$^\underline{o}$ grado.

Modi diversi per scrivere la stessa equazione possono risultare utili in contesti diversi. Osserviamo anche che il problema di Cauchy per un sistema dei I$^\underline{o}$ grado diventa

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{z}(x)}{dx} &= \vec{\mathsf{F}}(x, \vec{z}(x)) \\ \vec{z}(x_0) &= \vec{z}_0, \end{cases}$$

con $x_0 \in \mathbb{R}$, mentre $\vec{z}_0 \in \mathbb{R}^n$. Si osservi che assegnare il vettore $\vec{z}$ nel punto x_0 corrisponde ad assegnare il valore di y, $y', \dots, y^{(n-2)}$ e $y^{(n-1)}$ nello stesso punto. Confronta questo con (2).

2 Equazioni lineari

Consideriamo ora una classe particolare di equazioni differenziali ordinarie, quelle lineari. Un'equazione (differenziale ordinaria) lineare di grado n è un'equazione in cui la funzione $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ (vedi la Definizione 1) è lineare nelle variabili $y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)$, e $y^{(n)}(x)$. Pertanto, un'equazione differenziale lineare di grado n si può scrivere come

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)}(x) = f(x), \qquad \text{con } a_n(x) \not\equiv 0.$$

Noi supporremmo sempre che $a_n(x) = 1$ (si potrebbe dividere per $a_n(x)$ se $a_n \neq 0$; ulteriori dettagli si possono trovare nei libri citati alla fine delle note) in modo da scrivere l'equazione lineare (in forma normale) come

$$y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y^{(k)}(x) = f(x).$$

Osservazione 2. Le equazioni differenziali lineari godono della proprietà (il lettore può trovare la dimostrazione in qualsiasi testo di Analisi Matematica II) che l'insieme di esistenza per le soluzioni è tutta la retta reale. Inoltre, quando si trattano problemi di Cauchy con equazioni lineari si ha "gratis" esistenza e unicità delle soluzioni, per tutte le $x \in \mathbb{R}$.

Definizione 4. Se le funzioni $a_k(x)$ sono continue, si può definire un *operatore differenziale lineare*, $L : C^n(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$, cioè una funzione L che ha come dominio lo spazio vettoriale delle funzioni derivabili con continuità n volte e come codominio quello delle funzioni continue, nel seguente[3] modo:

$$L[y](x) \stackrel{def}{=} y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y^{(k)}(x). \tag{3}$$

Tale operatore è lineare perchè che con facili calcoli si può verificare che

$$\begin{aligned} &L[y_1 + y_2](x) = L[y_1](x) + L[y_2](x) && \forall\, y_1(x), y_2(x) \in C^n(\mathbb{R}) \\ &L[\alpha\, y](x) = \alpha L[y](x) && \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, y(x) \in C^n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

2.1 Equazioni lineari omogenee

Dalla linearità dell'operatore L (definito in (3)) associato ad un'equazione differenziale lineare ricaviamo il primo risultato.

Proposizione 1. (Principio di sovrapposizione) Siano y_1 e y_2 soluzioni della equazione lineare *omogenea*

$$L[y](x) = y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y^{(k)}(x) = 0. \tag{4}$$

[3] La notazione $L[y](x)$ significa che applichiamo l'operatore L alla funzione y e la funzione risultante $L[y]$ è valutata nel punto x.

Allora ogni combinazione lineare delle soluzioni

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \qquad \text{con } \alpha_1,\, \alpha_2 \in \mathbb{R},$$

è ancora soluzione dell'equazione differenziale (4). In altre parole l'insieme delle soluzioni della equazione omogenea è uno spazio vettoriale, o meglio il nucleo dell'operatore lineare L è uno spazio vettoriale.

Osservazione 3. Il principio di sovrapposizione non vale in generale per equazioni non lineari. Si verifica facilmente che le funzioni

$$y_1(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = \frac{1}{2-x} \qquad \text{sull'insieme }]-\infty, 1[,$$

risolvono l'equazione (non lineare) omogenea

$$y'(x) - y^2(x) = 0. \tag{5}$$

Un'altrettanto semplice verifica mostra che la funzione

$$y_1(x) + y_2(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2-x}$$

non risolve la (5), cioè che $y_1' + y_2' \neq (y_1 + y_2)^2$.

Lo spazio vettoriale $C^n(\mathbb{R})$ è uno spazio a dimensione infinita, ma il seguente risultato mostra come il nucleo di L sia uno spazio molto più semplice da trattare.

Proposizione 2. Lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea (4) ha dimensione finita e uguale al grado della equazione stessa. Pertanto l'insieme di tutte le soluzioni di (4) chiamato anche *integrale generale* si scrive come

$$\text{Span} < y_1(x), \ldots, y_n(x) >= \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \qquad \text{con } c_i \in \mathbb{R}.$$

Per trovare una base basta quindi esibire n funzioni linearmente indipendenti che siano soluzione di (4).

Vediamo ora la tecnica che permette di trovare queste funzioni nel caso di equazioni differenziali lineari omogenee e *a coefficienti costanti*, cioè quando le funzioni $a_k(x) = a_k \in \mathbb{R}$ sono delle costanti.

Ricordando che $\mathrm{e}^{\lambda x}$ risolve l'equazione $y' - \lambda y = 0$, la tecnica per calcolare le funzioni di base è quella di cercare delle soluzioni del tipo $\mathrm{e}^{\lambda x}$. Sostituendo in (4) (con $a_k(x) = a_k$) si ottiene con facili calcoli

$$\left[\lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k\right] \mathrm{e}^{\lambda x} = 0.$$

Dato che $\mathrm{e}^{\lambda x} \neq 0$ l'equazione viene risolta dai $\lambda \in \mathbb{C}$ che risolvono la cosiddetta *equazione caratteristica*

$$\lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k = 0. \tag{6}$$

Le soluzioni di (4) sono pertanto degli esponenziali del tipo $\mathrm{e}^{\lambda x}$, con $\lambda \in \mathbb{C}$ radici del *polinomio caratteristico* $P(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$. Se $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, le n radici di $P(\lambda)$, sono tutte distinte allora le funzioni $\mathrm{e}^{\lambda_i x}$ sono linearmente indipendenti ed essendo n formano una base delle soluzione della equazione lineare omogenea (4).

Purtroppo queste radici possono essere non tutte distinte. Per esempio, applicando questa tecnica all'equazione

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$$

otterremmo **due** volte la funzione e^x e non avremmo trovato **due** funzioni linearmente indipendenti. Dato che il grado della equazione è **due** la proposizione precedente ci dice che lo spazio vettoriale delle soluzioni ha dimensione **due** e quindi la tecnica vista fino ad ora non è sufficiente.

Tornando al caso generale il polinomio caratteristico ha grado n, quindi ha n radici complesse, ma queste possono avere molteplicità maggiore di uno. Per trattare tutti i casi abbiamo bisogno della seguente proposizione.

Proposizione 3. Se il polinomio caratteristico (6) (che è di grado n) ha come radici i numeri complessi $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, rispettivamente con molteplcità[4] $\mu_1, \ldots, \mu_k$, cioè si ha

$$\lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k = (\lambda - \lambda_1)^{\mu_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{\mu_2} \ldots (\lambda - \lambda_{k-1})^{\mu_{k-1}} \cdot (\lambda - \lambda_k)^{\mu_k},$$

allora tutte le soluzioni dell'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti sono date da

$$y(x) = \text{Span} < e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{\mu_1 - 1} e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, x e^{\lambda_2 x}, \ldots, x^{\mu_2 - 1} e^{\lambda_2 x}, \ldots, \ldots, e^{\lambda_k x}, \ldots, x^{\mu_k - 1} e^{\lambda_k x} > .$$

Il problema della risoluzione di un'equazione lineare a coefficienti costanti quindi si riduce a quello puramente algebrico del calcolo delle radici di un polinomio.
Risolviamo, per esempio, la seguente equazione

$$y^{(vi)}(x) - 4y^{(v)}(x) + 5y^{(iv)}(x) - 3y^{(iii)}(x) + 4y^{(ii)}(x) - 5y^{(i)}(x) + 2y(x) = 0. \qquad \text{(ESEMPIO 4)}$$

L'equazione caratteristica è

$$\lambda^6 - 4\lambda^6 + 5\lambda^4 - 3\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$$

e ora viene la parte difficile della fattorizzazione (negli esercizi la fattorizzazione ovviamente non può essere così complicata da effettuare)

$$P(\lambda) = \lambda^6 - 4\lambda^6 + 5\lambda^4 - 3\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = (\lambda - 1)^3(\lambda^2 + \lambda + 1)(\lambda - 2)$$

quindi abbiamo

Radice	Molteplicità
1	3
$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
2	1

Pertanto, lo spazio delle soluzioni avrà come base le sei funzioni

$$\left\{ e^x, x e^x, x^2 e^x, e^{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x}, e^{\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x}, e^{2x} \right\}.$$

In questo caso abbiamo anche radici complesse coniugate[5] del tipo $\alpha \pm i\beta$ e possiamo, usando le formule di Eulero[6], considerare come coppie di funzioni di base indifferentemente

$$\left\{ e^{(\alpha + i\beta)x}, e^{(\alpha - i\beta)x} \right\} \overset{\text{oppure}}{\longleftrightarrow} \left\{ e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x) \right\}.$$

A essere precisi la prima scelta corrisponde a considerare lo spazio generato su $\mathbb{C}$ dai due esponenziali, mentre (visto che a noi interessano solo le soluzioni reali delle equazioni differenziali) la seconda coppia di funzioni sottintende l'uso delle usuali combinazioni lineari a coefficienti reali. Nel nostro esempio quindi tutte le soluzioni (reali) della (ESEMPIO 4) sono

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_5 e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_6 e^{2x}, \qquad (7)$$

[4]Si osservi che $\mu_1 + \cdots + \mu_k = n$.
[5]Ricordiamo che se $\lambda \in \mathbb{C}$ è radice di un polinomio a coefficienti <u>reali</u>, allora anche $\overline{\lambda}$ è radice dello stesso polinomio.
[6]$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

al variare di c_i (per $i = 1, \dots, 6$) in $\mathbb{R}$. L'espressione in (7), l'insieme (o meglio lo spazio vettoriale) di tutte le soluzioni, è l'*integrale generale*.
Vediamo ora un esempio di Problema di Cauchy del $III^{\underline{o}}$ ordine.

$$\begin{cases} y'''(x) + y'(x) &= 0 \\ y(1) &= 0 \\ y'(1) &= 1 \\ y''(1) &= 0. \end{cases} \qquad \text{(ESEMPIO 5)}$$

Le soluzioni della equazione caratteristica sono $\lambda = 0$ e $\lambda = \pm i$ e l'integrale generale è quindi

$$y(x) = c_1 + c_2 \sin(x) + c_3 \cos(x).$$

Per risolvere il problema di Cauchy dobbiamo quindi imporre le tre condizioni (si derivi due volte l'integrale generale e si sostituisca $x \mapsto 1$) che diventano

$$\begin{cases} y(1) = c_1 + c_2 \sin(1) + c_3 \cos(1) &= 0 \\ y'(1) = c_2 \cos(1) - c_3 \sin(1) &= 1 \\ y''(1) = -c_3 \cos(1) - c_2 \sin(1) &= 0. \end{cases}$$

Si ha quindi un sistema lineare di tre equazioni nelle tre incognite c_1, c_2 e c_3. Risolvendolo si trova finalmente che $c_1 = 0$, $c_2 = \cos(1)$ e $c_3 = -\sin(1)$, quindi l'unica soluzione del problema di Cauchy (ESEMPIO 5) è

$$y(x) = \cos(1)\sin(x) - \sin(1)\cos(x).$$

2.2 Equazioni lineari non omogenee

Nel caso di equazioni lineari non omogenee, abbiamo il seguente risultato che è il corrispondente del "teorema di struttura" visto nel corso di Algebra Lineare per i sistemi lineari di n equazioni e k incognite. Le soluzioni di una equazione non omogenea non sono più uno spazio vettoriale, ma vale la seguente proposizione.

Proposizione 4. Sia $L : C^n(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ l'operatore lineare di grado n definito in (3) e siano $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ n-soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea $L[y](x) = 0$. Sia ora $y_f(x)$ una soluzione particolare dell'equazione non-omogenea

$$L[y_f](x) = y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y^{(k)}(x) = f(x), \tag{8}$$

con $f(x) \in C(\mathbb{R})$. Allora ogni soluzione della equazione non omogenea (8) è del tipo

$$y(x) = y_f(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x), \qquad \text{con } c_i \in \mathbb{R}.$$

La dimostrazione è rapidamente ottenuta osservando che se $z(x)$ è una soluzione dell'equazione non omogenea, allora (per la linearità di L)

$$L[z - y_f](x) = L[z](x) - L[y_f](x) = f(x) - f(x) = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Quindi la funzione $z(x) - y_f(x)$ risolve l'equazione omogenea e si può scrivere come combinazione lineare degli elementi della base:

$$\exists\, c_i \in \mathbb{R} : \quad z(x) - y_f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(y),$$

da cui la tesi.

2.2.1 Una tecnica risolutiva (Metodo degli annichilatori)

Dall'ultimo risultato ricaviamo che risolvere un'equazione non omogenea si riduce quindi prima 1) a risolvere quella omogenea associata e poi 2) a trovare una soluzione particolare della non omogenea. Vediamo ora un caso di risolubilità concreta, tornando alle equazioni a coefficienti costanti, per le quali sappiamo già come trovare le soluzioni dell'equazione omogenea.

Inoltre, non daremo un modo per risolvere tutte le equazioni del tipo

$$y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}(x) = f(x),$$

ma il metodo che esporremo funziona solo quando $f(x)$ è della forma particolare, prodotto di esponenziale (anche complesso) per polinomio.

Proposizione 5. Sia $f(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ con $P(x)$ polinomio di grado $k \geq 0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Allora una soluzione particolare dell'equazione

$$y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}(x) = f(x),$$

andrà cercata del tipo

$y_f(x) = Q(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$	se λ non risolve la equazione caratteristica
$y_f(x) = x^{\mu}Q(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$	se λ è soluzione, con molteplicità μ, dell'equazione caratteristica

con $Q(x)$ polinomio dello stesso grado di $P(x)$. Nel primo caso si dice che *non si ha risonanza*, mentre nel secondo che *si ha risonanza*.

Vediamo alcuni esempi.

$$y'(x) + 2y(x) = (x^2 + x + 1)\,\mathrm{e}^{x}. \qquad \text{(ESEMPIO 6)}$$

In questo caso l'equazione caratteristica è $\lambda + 2 = 0$, che ha come soluzione solo $\lambda = -2$. Siamo nel caso senza risonanza e quindi la soluzione va cercata della forma

$$y_f(x) = (a_2x^2 + a_1x + a_0)\,\mathrm{e}^{x}.$$

Imponendo che

$$y_f'(x) + 2y_f(x) = (x^2 + x + 1)\,\mathrm{e}^{x}.$$

si ottiene un sistema lineare di tre equazioni nelle incognite a_0, a_1, a_2. Risolvendolo si ricava

$$y_f(x) = \big(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{8}{27}\big)\mathrm{e}^{x}.$$

Pertanto, l'integrale generale risulta

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{-2x} + \big(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{8}{27}\big)\mathrm{e}^{x} \qquad c_1 \in \mathbb{R}.$$

$$y''(x) + y'(x) = x^3 - 1. \qquad \text{(ESEMPIO 7)}$$

In questo caso l'equazione caratteristica è $\lambda^2 + \lambda = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 0$ e $\lambda = -1$. La funzione $f(x)$ in questo caso è risonante!! perchè $f(x) = (x^3 - 1) = (x^3 - 1)\,\mathrm{e}^{0\,x}$. Pertanto, la soluzione particolare va cercata della forma

$$y_f(x) = x(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)$$

e, con facili calcoli, si ottiene

$$y_f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + 3x^2 - 7x$$

e quindi l'integrale generale risulta essere

$$y(x) = c_1 + c_2 \mathrm{e}^{-x} + \frac{x^4}{4} - x^3 + 3x^2 - 7x \qquad \text{con } c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Osservazione 4. Dalla linearità ricaviamo anche che per trovare una soluzione particolare di

$$L[y](x) = f_1(x) + f_2(x)$$

è sufficiente trovare una soluzione particolare y_{f_1} di $L[y](x) = f_1(x)$ e una soluzione particolare y_{f_2} di $L[y](x) = f_2(x)$ e infine sommarle. Infatti

$$L[y_{f_1} + y_{f_2}](x) = L[y_{f_1}](x) + L[y_{f_2}](x) = f_1(x) + f_2(x).$$

Per esercizio applicare questo risultato alla risoluzione di

$$y'(x) - 3y(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^x + (x^3 - 1)\,\mathrm{e}^{3x}.$$

Osservazione 5. Volendo considerare solo $f(x)$ reali (cosa che noi faremo sempre) osserviamo che

$$\mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{(\alpha + i\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)).$$

Pertanto la formula spiegata nella tabella di cui sopra si può precisare, per non avere a che fare con coefficienti complessi, nel seguente modo: se $f(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x} \sin(\beta x)$ (oppure anche $f(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x} \cos(\beta x)$, o anche una loro combinazione lineare, vista l'Osservazione 4) la soluzione particolare va cercata della seguente forma

$y_f(x) = \big(Q_1(x)\, \cos(\beta x) + Q_2(x)\, \sin(\beta x)\big)\, \mathrm{e}^{\alpha x}$	se $\alpha \pm i\beta$ non risolve l'equazione caratteristica
$y_f(x) = x^\mu \big(Q_1(x)\, \cos(\beta x) + Q_2(x)\, \sin(\beta x)\big)\, \mathrm{e}^{\alpha x}$	se $\alpha \pm i\beta$ è soluzione con molt. $\mu > 0$ dell'eq. caratt.

con $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ polinomi reali dello stesso grado di $P(x)$.

Il caso esposto sopra corrisponde a λ con parte immaginaria non nulla. Quindi in pratica si tratta di un modo per trattare $f(x)$ prodotto di 1) polinomio a coefficienti reali, 2) esponenziale, 3) seno o coseno, tutto con coefficienti reali[7].

Vediamo due esempi per questo caso

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = \cos(x). \qquad \text{(ESEMPIO 8)}$$

La equazione caratteristica $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ ha come soluzioni $\lambda = 1 \pm i$, e quindi non si ha risonanza (si avrebbe per $\lambda = \pm i$), quindi la soluzione particolare y_f va cercata della forma $y_f(x) = a_1 \sin(x) + a_2 \cos(x)$ e con qualche calcolo si ottiene

$$y_f(x) = \frac{1}{5} \cos(x) - \frac{2}{5} \sin(x).$$

Osserviamo che anche se la funzione f contiene solo il coseno, la soluzione particolare va cercata con seno *e* coseno. Finalmente l'integrale generale della (ESEMPIO 8) risulta essere

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^x \cos(x) + c_2 \mathrm{e}^x \sin(x) + \frac{1}{5} \cos(x) - \frac{2}{5} \sin(x).$$

[7] Osserviamo (vedi nota 5) che se $\alpha + i\beta$ è soluzione della equazione caratteristica, allora anche $\alpha - i\beta$ è soluzione. Quindi quando si calcola la molteplicità, che risulta la stessa per entrambe, bisogna vedere quante volte la prima radice (quella col "+") oppure la seconda radice (quella col "-") è soluzione dell'eq. caratteristica

Vediamo ora un esempio con risonanza

$$y''(x) + 4y(x) = x\sin(2x). \tag{ESEMPIO 9}$$

in questo caso le soluzioni dell'eq. caratt. sono $\lambda = \pm 2i$ e quindi abbiamo risonanza. Pertanto la soluzione particolare va cercata della forma

$$y_f(x) = x[(a_0 + a_1 x)\sin(2x) + (b_0 + b_1 x)\cos(2x)]$$

e come soluzione particolare si ottiene

$$y_f(x) = \frac{1}{16} x \sin(2x) - \frac{1}{8} x^2 \cos(2x)$$

e l'integrale generale è

$$y(x) = c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x) + \frac{1}{16} x \sin(2x) - \frac{1}{8} x^2 \cos(2x), \quad \text{con } c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2.3 Un'applicazione all'oscillatore armonico

Risolviamo ora esplicitamente un particolare problema di Cauchy relativo all'oscillatore armonico, che però risulta essere molto significativo per capire alcune caratteristiche qualitative riguardo al fenomeno della risonanza.

Sia $\alpha \neq 1$ e risolviamo

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) &= \cos(\alpha t) \\ x(0) &= 1 \\ x'(0) &= 0. \end{cases}$$

Il sistema rappresenta le oscillazioni di una molla che liberamente oscillerebbe con periodo 2π e che viene forzata da una forza esterna periodica di periodo che non è 2π. La molla parte all'istante $t = 0$ da ferma, cioè con velocità zero ($x'(0) = 0$), dalla posizione $x = 1$ ($x(0) = 1$).

In questo caso le radici della equazione caratteristica sono $\pm i$ e non si ha risonanza, visto che $\alpha \neq 1$. La soluzione particolare è del tipo $y_f(x) = a_0 \sin(\alpha t) + b_0 \cos(\alpha t)$. Con la tecnica esposta nella sezione precedente, e imponendo le condizioni iniziali, si arriva alla soluzione

$$x(t) = \frac{\alpha^2 \cos(t) - \cos(\alpha t)}{\alpha^2 - 1}.$$

La soluzione è una funzione limitata, visto che il coseno assume valori compresi tra -1 e 1. Osserviamo che se α è diverso da 1, la frazione -pur essendo finita- può assumere valori molto grandi se α differisce per una quantità molto piccola da 1!

Il problema è quello che succede quando $\alpha \to 1$, cioè quando ci avviciniamo alla risonanza. Quando α tende a 1, il denominatore tende a zero e quindi la espressione sopra (con la sostituzione $\alpha \mapsto 1$) non ha senso e non può essere la soluzione del problema di Cauchy. Se proviamo però a calcolare il seguente limite (tenendo fissato $t \in \mathbb{R}$ che è da considerarsi come un parametro) otteniamo[8]

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{\alpha^2 \cos(t) - \cos(\alpha t)}{\alpha^2 - 1} = \cos(t) + \frac{1}{2} t \sin(t).$$

Che è proprio la soluzione del problema di Cauchy con risonanza.

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) &= \cos(t) \\ x(0) &= 1 \\ x'(0) &= 0. \end{cases}$$

Alla stessa soluzione si arriva anche usando la tecnica esposta nella sezione precedente.

Osserviamo che nel caso con risonanza la soluzioni *non è limitata*. Quindi se la forza agisce con la stessa frequenza delle oscillazioni libere, le oscillazioni possono essere amplificate, fenomeno che non

[8] Per calcolare questo limite del tipo $\frac{0}{0}$ basta applicare la formula di de L'Hôpital derivando numeratore e denominatore rispetto ad α.

accade quando la forza non ha lo stesso periodo. Questo è il motivo per cui i militari "rompono" il passo attraversando i ponti, per evitare di sollecitarlo con una frequenza vicina a quella con cui esso naturalmente può effettuare piccoli spostamenti, sotto l'azione del vento, traffico, piccoli terremoti... Per vedere effetti catastrofici della risonanza[9] su di un ponte quando le raffiche di vento soffiano con frequenze che entrano in risonanza, vedi per esempio questi Tacoma 1 e Tacoma 2 o altri links al Tacoma Bridge.

3 Equazioni a variabili separabili

In questa sezione vediamo un caso di equazioni non lineari che sono risolvibili tramite quadratura, o integrazione: le equazioni differenziali a variabili separabili. Queste ultime sono equazioni (in forma normale) del I° grado in cui il termine non contenente la derivata è prodotto di una funzione della sola x e di una della sola y, quindi del tipo

$$y'(x) = f(x)\, g(y(x)). \tag{9}$$

Per risolverle definiamo F e G nel seguente modo

$$F' = f \qquad G' = \frac{1}{g},$$

cioè F è una primitiva di f e G è una primitiva di $1/g$. Se scriviamo

$$G(y(x)) = F(x), \tag{10}$$

la y definita in questo modo risolve la (9). Infatti derivando la (10) rispetto ad x si ottiene

$$G'(y(x))y'(x) = F'(x) \qquad \text{quindi} \qquad \frac{1}{g(y(x))}y'(x) = f(x)$$

e quindi la tesi. Una maniera mnemonica per ricordare questi passaggi [10] e quella, partendo dalla (9) di moltiplicare ambo i membri per dx e dividere per $g(y(x))$ e poi integrare termine a termine:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx,$$

ottenendo lo stesso risultato.

Vediamo un semplice esempio

$$y'(x) = \cos(x)(1 + y^2(x)). \tag{ESEMPIO 10}$$

In questo caso si ha $f(x) = \cos(x)$ e $g(y) = 1 + y^2$, quindi operando come sopra si ha

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \cos(x)\, dx$$

e pertanto

$$\arctan(y) = \sin(x) + c.$$

Notare che abbiamo messo la costante di integrazione solo da una parte, anche se in realtà avremmo due costanti, una per ogni primitiva. Portando la costante della primitiva G a destra dell'uguale a destra ed eventualmente cambiando nome alle costanti, possiamo sempre ricondurci ad avere una sola costante.

Alla fine arriviamo alla esplicitazione della y, che richiede che la funzione $G(y) = \arctan(y)$ sia invertibile. Pertanto abbiamo

$$y(x) = \tan(\sin(x) + c).$$

[9] Anche se in realtà il fenomeno é ben piú complesso e quella della risonanza è una spiegazione solo parziale dei motivi del crollo

[10] per giustificare rigorosamente il metodo risolutivo per le equazioni a variabili separabili servirebbe un teorema sulle funzioni implicite di Ulisse Dini

Analizziamo ora un problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) &= \dfrac{x}{y} \\ y(0) &= 1. \end{cases} \qquad \text{(ESEMPIO 11)}$$

Abbiamo allora, moltiplicando per dx, dividendo per $1/y$ e integrando

$$\int_{y_0}^{y} y\,dy = \int_{x_0}^{x} t\,dt$$

con $x_0 = 0$ e $y_0 = 1$. Si arriva perciò a

$$\frac{y^2 - 1}{2} = \frac{x^2}{2}$$

e, alla fine, la soluzione risulta

$$y = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Osserviamo che nell'ultimo passaggio abbiamo dovuto invertire la funzione y^2 e questo non sarebbe possibile, o meglio lo è se restringiamo il suo dominio. Siccome la nostra soluzione y è positiva per $x = 0$ essa lo sarà in tutto un intorno di $x_0 = 0$ (teorema della permanenza del segno visto che y è continua). Questo ci permette quindi di scegliere il segno + davanti alla radice (in realtà in questo caso si potrebbe mostrare che la soluzione di (ESEMPIO 10) è sempre positiva, se $y_0 > 0$).

Il prossimo esempio mostra come, in generale, non ci si possa aspettare che le soluzioni di un'equazione differenziale generica (pur semplice) siano definite su tutto $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} y'(x) &= y^2 \\ y(0) &= 1. \end{cases} \qquad \text{(ESEMPIO 12)}$$

Con la separazione delle variabili otteniamo $\int \frac{dy}{y^2} = \int dx$ e quindi

$$-\frac{1}{y} = x + c.$$

Imponendo la condizione iniziale si calcola il valore della costante c e si ottiene finalmente

$$y(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \text{per } x < 1,$$

che risulta essere definita solo per $x < 1$. Quindi è rispettato il fatto che la soluzione è definita (e derivabile con continuità) in un intervallo contenente il punto $x_0 = 0$, ma la soluzione non può essere "prolungata" oltre il punto $x = 1$. Anche se la funzione $\frac{1}{x-1}$ risulta formalmente definita anche per $x > 1$, per tali punti essa non rappresenta una soluzione di (ESEMPIO 12). Se y rappresenta la posizione di un punto materiale costretto a muoversi su di una linea retta e la cui velocità y' è uguale alla posizione al quadrato y^2, allora la soluzione mostra che il punto percorre uno spazio infinito in un tempo finito, $y \to +\infty$ per $x \to 1^-$.

Il prossimo esempio mostra come, in generale non ci si possa aspettare unicità delle soluzioni di una problema di Cauchy (anche con equazioni in apparenza semplici).

$$\begin{cases} y'(x) &= \sqrt{|y(x)|} \\ y(0) &= 0. \end{cases} \qquad \text{(ESEMPIO 13)}$$

Con la tecnica di separazione delle variabili otteniamo come soluzione

$$y(x) = \frac{x^2}{4}.$$

L'unica osservazione da fare prima di cominciare i calcoli è che visto che y' è uguale ad una radice, allora $y' \geq 0$. Quindi y è una funzione crescente e allora per $x \geq 0$ è sempre maggiore di $y(0) = 0$: da questo otteniamo che $|y(x)| = y(x)$ per $x \geq 0$.

Osserviamo inoltre (con verifica diretta) che anche la funzione $y \equiv 0$ è soluzione di (ESEMPIO 13). Sempre con verifica diretta si mostra anche che scelto $C \geq 0$ qualsiasi, la funzione

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < C \\ \dfrac{(x-C)^2}{4} & \text{per } x \geq C \end{cases}$$

è soluzione di (ESEMPIO 13). Quindi il problema di Cauchy analizzato ora ammette infinite soluzioni.

Questi due esempi servono per capire quale sia la particolarità delle equazioni lineari. Per quest'ultime il problema di Cauchy ammette una e una sola soluzione definita per ogni $x \in \mathbb{R}$: abbiamo visto con due esempi elementari come queste due proprietà possano essere in generale false nello studio di equazioni non-lineari.

Ulteriori dettagli sulle equazioni differenziali e specialmente per quelle lineari si possono trovare in tutti i testi di Analisi Matematica II, anche se le tecniche usate per provare i risultati richiedono parte del corso di Analisi Matematica II. Vedi per esempio in:

- T.M. Apostol, Calcolo, Volume Terzo, Analisi 2, Boringhieri (Capitolo 2).
- S. Campanato, Esercizi e complementi di Analisi Matematica 2º parte, Libreria Scientifica G. Pellegrini (Capitolo Vº.3).
- E. Giusti, Analisi Matematica II, Boringhieri (Capitolo 17.5 e 17.6).