Note sintetiche sui numeri reali dal punto di vista degli ingegneri [1].

Placido Longo

28 dicembre 2005

[1] Bozza n.1

Capitolo 1

Cos'è un numero reale?

DEFINIZIONE 1 *Un numero reale*

$$a = N.a_1a_2\dots a_n\dots$$

si intende definito, con qualche precauzione indicata più in basso, da una serie decimale, individuata dalla sua parte intera *e dalle sue* cifre.
La parte intera N *è un intero relativo, mentre le cifre* $a_i \quad i \in \mathbb{N}$*, sono interi da* 0 *a* 9*.*

In pratica, un numero reale è definito se si conosce un algoritmo (un programma di computer) capace di calcolare a_i per ogni i prefissato.
È possibile utilizzare basi di numerazione diverse (binari, esadecimali, ternari) ottenendo sempre lo stesso insieme di oggetti, variando solo l'insieme delle cifre: $0, 1$ per i binari (o diadici), $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$ per gli esadecimali (o 16-adici), $0, 1, 2$ per i ternari (o triadici).

DEFINIZIONE 2 *Dato un numero reale* a*, definito dalla serie decimale*

$$a = N.a_1a_2\dots a_n\dots$$

si definiscono le sue troncate per difetto

$$[a]_n = N.a_1a_2\dots a_n$$

e quelle per eccesso

$$[a]^n = N.a_1a_2\dots a_n + 10^{-n}$$

Ad esempio, l'infame 3.14 non è π, ma la sua troncata per difetto $[\pi]_2$.
La parte intera N corrisponde alla troncata $[a]_0$ e viene denotata anche semplicemente con $[a]$.

Le serie decimali si presentano naturalmente come risultato di importanti algoritmi e procedimenti. La divisione euclidea con la virgola, prolungata arbitrariamente, produce in generale una serie decimale infinita (per esempio

calcolando 1 : 3). Analogo comportamento si verifica misurando un segmento con un altro o costruendo la radice quadrata [Cfr. Introduzione].
Le troncate di una serie decimale sono numeri decimali sui quali si può operare con le regola imparate dall'infanzia.
L'idea centrale della teoria dei numeri reali è di operare su di essi (e in sostanza, addirittura di definirli) per approssimazione, attraverso le rispettive troncate.
Se un reale è definito, si è in grado di determinare una sua qualunque troncata, e dunque un decimale (finito) a distanza arbitrariamente piccola da esso.

È noto (Cfr.Introduzione) che non esistono razionali, e a maggior ragione decimali finiti – essi sono i razionali con denominatore 10^n – il cui quadrato valga 2. Esistono però regole per il calcolo della radice (cfr. Introduzione) che permettono di calcolare valori approssimati per eccesso e per difetto di $\sqrt{2}$ con un numero arbitrario di cifre decimali. In simili condizioni considereremo definito il numero $\sqrt{2}$.

Nelle poche note che seguono verrà precisato, attraverso l'uso delle troncate, cosa vogliano dire:

- $a = b$
- $a \leq b$
- $a < b$
- $a + b$
- $a - b$
- $a \times b$

  e accenneremo a come definire

- $1/b$ $\quad$ *e* $\quad$ a/b
- a^b

quando i termini siano numeri reali.
Tutte le definizioni che seguono sono tese ad estendere ai reali le proprietà di corpo commutativo ordinato godute dai razionali (Cfr. Introduzione), aggiungendovi in più la completezza, che rende possibile di dimostrare i principali teoremi di esistenza dell'Analisi Matematica, fra i quali il teorema degli zeri.
Come sottoprodotto si ottiene l'esistenza della radice e del logaritmo nei reali (che sono zeri di $x^n - k$ e di $e^x - k$).
Nell'esposizione presentata, persino la definizione delle operazioni algebriche verrà introdotta utilizzando la completezza.

1.1 Razionali e serie decimali periodiche

Un importante problema da affrontare subito trattando di serie decimali è di stabilire subito quali serie corrispondano ai numeri razionali e quali definiscano

invece numeri irrazionali.
La risposta, sebbene assai delicata e articolata da dimostrare, è molto semplice da enunciare:

TEOREMA 1 *Una serie decimale rappresenta un numero razionale se e solo se essa è* periodica*, ossia se tutte le cifre decimali a partire da un opportuno n sono costituite da un gruppo di cifre, detto periodo, che si ripete identico da lì in poi. Le cifre che precedono il periodo sono dette anche antiperiodo.*

Con un po' di pazienza (e di gusto per l'algebra) si può provare che eseguendo la divisione m/n, per ogni m, n interi, e prolungandola indefinitamente dopo la virgola, si ottiene sempre una serie periodica. Essa risulta di periodo 0, cioè rappresenta una divisione "esatta", se dopo aver ridotto m ed n ai minimi termini, al denominatore restano solo potenze di 2 e 5: in tutti gli altri casi avrà un periodo non nullo.
Analogamente, con un po' di pazienza e d'ingegno si può costruire una frazione che produca eseguendo la divisione una qualunque serie decimale, con l'unica eccezione di quelle periodiche di periodo 9, che saranno protagoniste della prossima sezione.

Ad esempio, $0.\overline{1} = 1/9$, $0.\overline{27} = 27/99$, $31.23\overline{123} = 31.23 + 123/99900$
Lo strano comportamento delle serie 9-periodiche ($0.\overline{9} = 9/9 = 1$???) si vedrà essere tutt'altro che strano!
In sostanza, comunque si vogliano scrivere, i razionali sono i soli numeri che si possano "codificare" usando solo un numero finito di simboli, in quanto le serie periodiche si possono "abbreviare", scrivere in modo compatto.
Se si vuole scrivere una serie decimale rappresentante un irrazionale, basta assicurarsi che non sia periodica, come ad esempio:

$$0, 101001000100001000001\ldots$$

Il numero di zeri dopo ogni cifra 1 cresce ad ogni passo e dunque la serie non può essere periodica. Dunque, il numero da essa rappresentato non è razionale.

Capitolo 2

Uguaglianza

La stessa definizione di serie decimale suggerisce di porre la definizione (FALSA!!!) che due numeri reali sono uguali se e solo se le serie che li definiscono hanno la stessa parte intera e le stesse cifre.
Ragionando così, le due serie

$$0.99999999\ldots$$

e

$$1.0000000\ldots$$

rappresenterebbero numeri diversi, entrambi appartenenti allo stesso intervallo $[\ 0.999\ldots 9\ ,\ 1.000\ldots 0\ ]$, la cui ampiezza è 10^{-n}, se n è il numero delle cifre.
In vista dell'impiego dei numeri reali per esprimere misure di grandezze, bisogna attendersi uno scontro con il Postulato di Eudosso e Archimede.

Per ogni coppia di segmenti,
esiste un multiplo del primo che supera il secondo.

(e ciò comunque piccolo sia il primo e comunque grande sia il secondo. Cfr. anche i proverbi: "Chi va piano, va sano e va lontano" e "Anche un lungo viaggio comincia con un passo").

Visto che 10^{-n} è, per n grande abbastanza, più piccolo di qualunque razionale, si è costretti ad identificare $0.\overline{9}$ e $1.\overline{0}$: altrimenti la loro differenza (da definire ancora) α dovrà essere per un verso strettamente positiva, essendo essi diversi, ma per un altro verso minore di 10^{-n}, per ogni n, da cui $10^n\,\alpha < 1$, cosa incompatibile con il postulato di Eudosso e Archimede.

In sostanza, i numeri reali sono sì individuati dalle serie decimali, ma *ogni serie periodiche di periodo 9 deve essere identificata con la serie* 0*-periodica corrispondente*, almeno se si vuole ottenere un campo archimedeo.
Ad esempio:

$$1.3\overline{9} = 1.4 = 1.4\overline{0} \qquad 23,147\overline{9} = 23.148 = 23.148\overline{0}$$

e così via.

Un importante criterio di uguaglianza fra numeri reali è espresso dal seguente

TEOREMA 2 *Due numeri reali a e b sono uguali se e solo se*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |\, [a]_n - [b]_n \,| \leq 10^{-n}$$

Non è difficile provare che tale criterio compendia le due diverse condizioni sotto le quali due serie esprimono numeri eguali: se sono identiche oppure se sono due rappresentazioni, l'una 0-periodica e l'altra 9-periodica (con l'antiperiodo diminuito di un'unità sull'ultima cifra), dello stesso decimale finito.

Per meglio visualizzare lo scenario, si pensi a due strumenti di misura digitali (la cui lettura è la troncata ad un numero prefissato di cifre della grandezza sotto misura), che forniscano due letture che differiscono di un'unità sull'ultima cifra. Nulla si può dire sulla reale distanza fra le due letture: se lo strumento fornisce tre cire decimali e i valori reali misurati sono 1.033999 l'uno, e 1.034000 l'altro, la loro distanza non è 10^{-3}, come sembrerebbe dal display a tre cifre, ma 10^{-6}.

Ne segue il criterio di diseguaglianza:

TEOREMA 3 *Due numeri reali a e b sono distinti se e solo se*

$$\exists \overline{n} \in \mathbb{N} \qquad |\, [a]_{\overline{n}} - [b]_{\overline{n}} \,| > 10^{-\overline{n}}$$

È della massima importanza l'osservare che, se la differenza fra due troncate a n cifre è strettamente maggiore di 10^{-n}, e cioè di un'unità sull'ultima cifra, ciò vuol dire che vale almeno due unità, e cioè 2×10^{-n}. Il criterio può dunque essere enunciato come segue:

$$a \neq b \iff \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \qquad |\, [a]_{\overline{n}} - [b]_{\overline{n}} \,| \geq 2 \times 10^{-\overline{n}}$$

Non è difficile, basandosi sul criterio di eguaglianza, provare che la relazione di eguaglianza fra numeri appena enunciata gode delle tre proprietà fondamentali delle relazioni d'equivalenza:

- $a = a$ (proprietà riflessiva)
- Se $a = b$ allora $b = a$ (proprietà simmetrica)
- $a = b$ e $b = c$ implicano $a = c$ (proprietà transitiva)

ed è dunque una "buona" relazione di uguaglianza.

Capitolo 3

Ordinamento

L'ordinamento naturale dei numeri decimali, imparato da bambini, è piuttosto articolato:

- Se le parti intere sono differenti, è maggiore il numero con la parte intera maggiore.
- Se le parti intere sono eguali, allora si considerano le parti decimali sulle quali si introduce l'ordine lessicografico, e cioè quello del vocabolario: si confrontano le cifre corrispondenti cominciando dalla prima, ed è maggiore il numero che per primo ha una cifra decimale maggiore dell'altro.

Questo criterio si potrebbe estendere immediatamente alle serie decimali, ma NON ai numeri reali, a causa della doppia rapresentazione dei decimali finiti.

DEFINIZIONE 3 *Dati due numeri reali a e b, si dirà che $a \leq b$ se e solo se*

$$a = b$$

OPPURE

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad [a]_n \leq [b]_n$$

Si dirà anche che $a < b$ se e solo se

$$a \neq b$$

e INOLTRE $a \leq b$ e dunque

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad [a]_n \leq [b]_n$$

Osserviamo che, per $a = 1.\overline{0}$ e $b = 0.\overline{9}$, $a \leq b$ è vera, in quanto $a = b$, ma $[a]_n \leq [b]_n$ è falsa per ogni n. Analogamente, si ha anche $[b]_n < [a]_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, ma è falso che $b < a$ in quanto $a = b$. In definitiva:

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad [a]_n \leq [b]_n \qquad \Rightarrow \qquad a \leq b$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad [a]_n < [b]_n \qquad \Rightarrow \qquad a \leq b$

- $a < b \qquad \Rightarrow \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad [a]_n < [b]_n$

Osserviamo che gli esempi precedenti dimostrano che tutte le implicazioni inverse sono false.
Analoghe definizioni (e seccature!) valgono per l'altra diseguaglianza $\geq$.
La diseguaglianza così definita verifica le proprietà fondamentali delle relazioni d'ordine:

- $a \leq a$ (proprietà riflessiva)
- Se $a \leq b$ e $b \leq a$ allora $a = b$ (proprietà antisimmetrica)
- Se $a \leq b$ e $b \leq c$ allora $a \leq c$ (proprietà transitiva)

Un'importantissima proprietà dei razionali, conseguenza immediata del criterio di diseguaglianza, è la *densità* :

TEOREMA 4 *Dati a e b, con $a < b$, esiste un numero razionale q tale che $a \leq q \leq b$.*

La prova è facile ricordando che $a < b$ implica che $a \neq b$, e dunque, per qualche $n_0 \in \mathbb{N}$, si ha

$$[a]_{n_0} + 2 \times \ 10^{-n_0} \leq [b]_{n_0}$$

da cui

$$[a]_{n_0} \leq [a]_{n_0} + 10^{-n_0} \leq [b]_{n_0}$$

Davvero un modo complicato per dire che se qualche troncata di b è di 2 unità più grande di quella di a, basta sommarci solo un'unità per stare dentro! Non è proprio così banale: a potrebbe essere 9-periodica, e una proprietà simile per la diseguaglianza stretta sarebbe (vera, ma) un briciolo più complicata da provare.
Infine, una piccola modifica della prova precedente, tenendo conto dell'esempio di numero irrazionale della sezione 1.1 prova che ogni intervallo $[a\,,\,b],\ a < b$ contiene, oltre che razionali (e addirittura decimali finiti), anche irrazionali: gli irrazionali sono anch'essi densi nei reali.

3.1 Insiemi limitati, maggioranti ed estremo superiore

DEFINIZIONE 4 *Un sottinsieme A di reali si dice* superiormente limitato *se*

$$\exists K : \qquad \forall x \in A \qquad x \leq K$$

Ogni valore K verificante la proprietà precedente si dirà maggiorante di (o per) A. *Si dirà* massimo *di A, il numero M, se esiste, tale che*

1. $M \in A$
2. $\forall x \in A \qquad x \leq M$

Se esiste, il massimo è unico per la proprietà antisimmetrica della diseguaglianza. Analogamente si definiscono i minoranti *e il* minimo *per un insieme A* limitato inferiormente.

I reali godono di una proprietà fondamentale, che i razionali non posseggono.

TEOREMA 5 *(di esistenza dell'estremo superiore)*
Sia A un insieme limitato superiormente di reali.
Posto allora (Cfr. Introduzione, algoritmi per la radice)

$$A_n = \max\{[a]_n, \quad a \in A\}$$

si ha che:

1. *il massimo sopra indicato esiste per ogni n*
2. *i valori di A_n sono le troncate di un numero reale Λ, e cioè $[A_{n+1}]_n = A_n$*
3. *Λ è il minimo dei maggioranti di A.*

La prima propietà cruciale, deriva in modo non proprio diretto dal fatto che ogni insieme limitato di numeri interi è finito, e quindi ha massimo. La seconda proprietà, un po' criptica, dice solo che quando si considera la massima delle troncate degli elementi di A con un numero maggiore di cifre, le cifre già determinate in precedenza non cambiano. La troncata ad una cifra decimale di Λ, può dunque essere determinata calcolando il massimo delle troncate ad una cifra di tutti gli elementi di A, con la certezza che i numeri $[\Lambda]_n$ a due,tre $\ldots$, n cifre avranno tutti la stessa parte intera e la stessa prima cifra decimale. L'ultima è la proprietà caratteristica dei numeri reali: è detta anche completezza e se ne parlerà ancora.

DEFINIZIONE 5 *Se A è limitato superiormente, si chiamerà* estremo superiore di A *il minimo dei suoi maggioranti e verrà denotato con il simbolo*

$$\sup A$$

Se A non ha maggioranti (ad esempio, se A è l'insieme dei numeri naturali) si scriverà

$$\sup A = +\infty$$

Il fatto che l'insieme dei maggioranti, se non vuoto, abbia minimo è conseguenza del teorema precedente.
In modo analogo, dato un insieme limitato inferiormente, si definiscono i *minoranti* e *il massimo minorante*, detto *estremo inferiore* e denotato con $\inf A$. Se A non è limitato inferiormente, si pone infine $\inf A = -\infty$.

Una fondamentale conseguenza dell'esistenza dell'estremo superiore è il seguente

TEOREMA 6 *PRINCIPIO DI LOCALIZZAZIONE (di G.Cantor)*
Data una successione di intervalli chiusi

$$I_0 = [a_0, b_0] \supseteq I_1 = [a_1, b_1] \supseteq \cdots \supseteq I_n = [a_n, b_n] \supseteq \cdots$$

tale che

$$\forall M \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} : \quad b_n - a_n < 10^{-M}$$

esiste un unico numero reale x^* verificante

$$x^* \in I_n \qquad \forall n \in N$$

Risulta inoltre $x^* = \sup\{a_n\} = inf\{b_n\}$.

Il lettore attento avrà notato che la differenza $b_n - a_n$ non significa ancora nulla! In effetti, la via da seguire è piuttosto tortuosa: come vedremo più avanti, per definire la differenza di reali si adopera sì il principio di Cantor, ma applicandolo ad intervalli gli estremi dei quali sono decimali finiti (le troncate dei termini della differenza), per i quali tutte le operazioni sono note dall'infanzia. Definita la differenza di reali, si può poi enunciare e provare il principio di localizzazione nella forma generale.
Il principio di localizzazione è di fatto equivalente all'esistenza dell'estremo superiore, ed è dunque un modo alternativo di enunciare la *completezza* dei reali. L'utilità del principio di localizzazione deriva dal fatto che permette di definire numeri reali per mezzo di loro approssimazioni dal basso e dall'alto. L'unica difficoltà tecnica risiede nel dover verificare che la distanza fra le approssimazioni per difetto e quelle per eccesso, ossia l'errore nella localizzazione, possa essere reso arbitrariamente piccolo, raffinando abbastanza l'approssimazione.
Osserviamo anche che la condizione

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$$

può anche essere scritta

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$$
$$b_0 \geq b_1 \geq \cdots \geq b_n \geq \cdots$$

Si ha inoltre

$$a_n \leq b_n$$

Una conseguenza importante di questi sistemi di diseguaglianze è che

$$a_n \leq b_m \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

Infatti se $n > m$ ne segue $a_n \leq b_n \leq b_m$, mentre se è $n < m$ sarà $a_n \leq a_m \leq b_m$. Con terminologia un po' antiquata, si dice che le classi $\{a_n\}$ e $\{b_m\}$ delle approssimazioni per difetto e di quelle per eccesso sono *separate*. Il fatto che per ogni numero 10^{-M}, e quindi per ogni numero comunque piccolo, esistano a_n e b_n tali che $b_n - a_n < 10^{-M}$, veniva nella stessa terminologia espresso dicendo che le classi sono *contigue*.
La completezza permette di associare un unico numero reale ad ogni coppia di classi separate e contigue. Ad esempio, può essere provato che le classi delle aree dei poligoni inscritti e circoscritti ad un cerchio sono separate e contigue, e dunque individuano un unico numero reale, che definirà l'area del cerchio. Nel caso del cerchio di raggio unitario ciò definisce il leggendario π. Nel prossimo capitolo verrà impiegato il principio di localizzazione per definire, attraverso operazioni sulle troncate e stima degli errori, le operazioni aritmetiche elementari, e verrà mostrato con un esempio come verificarne le proprietà algebriche essenziali.

Capitolo 4

Operazioni algebriche su numeri reali

È tempo di precisare come si opera sui reali: "Che vuol dire $e+\pi$, o $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$"? Se si dovesse eseguire il calcolo su una calcolatrice tascabile, si otterrebbe un certo numero di cifre decimali esatte, in dipendenza dal tipo di calcolatrice.
L'idea da seguire è che, come conseguenza delle proprietà della disuguaglianza (Cfr. Introduzione, assiomi di campo ordinato), da $a \le x \le b$ e $c \le y \le d$ deve seguire $a+c \le x+y \le b+d$.
Si osservi che, nel definire la somma, da

$$[a]_n \le a \le [a]^n$$

e

$$[b]_n \le b \le [b]^n$$

deve seguire

$$[a]_n + [b]_n \le a+b \le [a]^n + [b]^n = [a]_n + [b]_n + 2 \times 10^{-n}$$

Si può allora pensare di utilizzare il principio di localizzazione applicato agli intervalli

$$I_n = [\ [a]_n + [b]_n\ ,\ [a]_n + [b]_n + 2 \times 10^{-n}]$$

cosa possibile perché l'ampiezza dell'intervallo I_n vale $2 \times 10^{-n} < 10^{-n+1}$.

DEFINIZIONE 6 *Dati a e b reali, la somma $a+b$ è definita come l'unico numero reale individuato per localizzazione dagli intervalli*

$$I_n = [\ [a]_n + [b]_n\ ,\ [a]_n + [b]_n + 2 \times 10^{-n}]$$

Un interessante sottoprodotto di questa definizione è che si può controllare l'errore che si commettte troncando i numeri reali ad n cifre, come farebbe qualunque macchinetta: esso vale 2×10^{-n}, e cioè due unità sull'ultima cifra. Se quindi si stima $e+\pi$ con $2.71+3.14$, assumendo quindi $n=2$, il risultato ottenuto 5.85 può distare da $e+\pi$ fino a 0.02: l'ultima cifra potrebbe non essere quella giusta. Se invece si vogliono 2 cifre giuste, e quindi un errore minore di 10^{-2}, occorre

calcolare e e π con tre cifre decimali ($n = 3$), in modo che $2 \times 10^{-n+1} < 10^{-2}$.
Un'interessantissima applicazione dell'unicità del punto localizzato si può ottenere provando le proprietà algebriche fondamentali della somma (Cfr. Introduzione). Ad esempio, per provare la proprietà commutativa, basta osservare che

$$a + b \in [\ [a]_n + [b]_n\ ,\ [a]_n + [b]_n + 2 \times 10^{-n}]$$

e che

$$b + a \in [\ [b]_n + [a]_n\ ,\ [b]_n + [a]_n + 2 \times 10^{-n}]$$

Dalla proprietà commutativa per i decimali (finiti), segue che gli intervalli precedenti sono identici e, per l'unicità del punto localizzato, anche i punti localizzati lo sono, da cui $a + b = b + a$. Solo con un po' di pazienza in più si può provare la proprietà associativa e, a breve, le proprietà analoghe per il prodotto oltre a quella distributiva.
Per affrontare la definizione del prodotto, si comincia con i reali positivi, cioè quelli a troncate positive. Analogamente a quanto fatto prima, da $a \leq x \leq b$ e $c \leq y \leq d$ deve seguire $a\,c \leq x\,y \leq b\,d$.
Dunque, da

$$[a]_n \leq a \leq [a]^n$$

e

$$[b]_n \leq b \leq [b]^n$$

deve seguire

$$a\,b \in [\ [a]_n\,[b]_n\ ,\ [a]^n\,[b]^n]$$

e cioè

$$a\,b \in\ [\ [a]_n\,[b]_n\ ,\ [a]_n\,[b]_n\ + 10^{-n}(\ [a]_n + [b]_n\ ) + 10^{-2\,n}]$$

Per utilizzare questi intervalli per localizzare il prodotto occorre provare che la loro ampiezza può essere resa minore di 10^{-M} scegliendo opportunamente n, e ciò per ogni M intero. Osserviamo che l'ampiezza degli intervalli precedenti, che stima l'erore commesso, vale

$$\epsilon_n\ =\ 10^{-n}\ (\ [a]_n + [b]_n + 10^{-n})$$

Dato ad arbitrio il valore 10^{-M}, si osservi che

$$[a]_n \leq [a]^0 = [a]_0 + 1$$

$$[b]_n \leq [b]^0 = [b]_0 + 1$$

e

$$10^{-n} \leq 1$$

da cui, posto $K = [a]_0 + [b]_0 + 3$ e scelto $H \in \mathbb{N}$ tale che $K < 10^H$ si ha infine

$$\epsilon_n \leq 10^{-n}\,K \leq 10^{-n+H}$$

In sostanza, l'errore iniziale sui fattori, 10^{-n}, viene moltiplicato per $(\ [a]_n + [b]_n + 10^{-n})$; stimata per eccesso questa quantità utilizzando la più grossa troncata, quella intera per eccesso, e stimata a sua volta questa quantità K con una potenza di 10, si ottiene una stima molto grossolana, ma con il vantaggio di essere espressa da una potenza di 10. Questa potrà essere confrontata direttamente con 10^{-M}, e una stima dell'errore commesso sarà 10^{-n+H}. In definitiva

occorre scegliere n in modo da avere $10^{-n+H} \leq 10^{-M}$ e dunque $n = M + H$.
Ad esempio, con quante cifre vanno calcolati e e π perché il prodotto delle troncate $[e]_n \ [\pi]_n$ disti dal valore esatto meno di 10^{-2}?
Dato che $[e] = 2$, mentre di $[\pi] = 3$, ne segue che $K = 2+3+3 = 8$ e la potenza più piccola di 10 maggiore di 8 è 10, che corrisponde ad $H = 1$. Ne segue che l'errore finale

$$\epsilon_n \leq 10^{-n}\ 10^1$$

da cui segue infine che l'errore (massimo) commesso è 10 volte quello iniziale sui fattori. Se si vuole un errore finale di 10^{-2} , occorre scegliere n in modo da avere $\epsilon_n \leq 10^{-2}$ e dunque $n = 3$. Diversamente dall'errore della somma, che vale 2×10^{-n} e che è dunque indipendente dagli addendi da sommare e dipendente solo dal numero di cifre con il quale sono stati calcolati, l'errore del prodotto è enormemente influenzato dalla grandezza dei fattori, a causa del termine $[a]_n + [b]_n$, che *moltiplica* l'errore iniziale sui fattori 10^{-n}. Moltiplicare due fattori dell'ordine di 10^3 vuol dire che l'errore iniziale è moltiplicato per una fattore dell'ordine di duemila, il che implica una perdita di precisione, rispetto all'errore iniziale 10^{-n}, di quattro cifre decimali ($2000 < 10000$).

Ne segue la

DEFINIZIONE 7 *Dati a e b reali positivi, si definisce il loro prodotto $a\,b$ come il numero reale definito per localizzazione dagli intervalli*

$$I_n = [\ [a]_n\,[b]_n\ ,\ [a]_n\,[b]_n\ + 10^{-n}(\ [a]_n + [b]_n\ ) + 10^{-2\,n}]$$

Per reali di segno arbitrario, si moltiplicano i valori assoluti e si decide il segno con la consueta regola.

La definizione della differenza dipende da quella della somma e quella dell'opposto, e cioè $a - b = a + (-b)$. Per definire l'opposto, tenendo conto che deve risultare $-[a]^n \ \leq\ -a\ \leq\ -[a]_n$, basta porre la

DEFINIZIONE 8 *Dato un numero reale a, si definisce l'opposto $-a$ come il reale definito per localizzazione da*

$$I_n = = [\ -[a]^n\ ,\ -[a]_n\ ]\ =\ [\ -[a]_n - 10^{-n}\ ,\ -[a]_n\ ]$$

Più delicata è la faccenda del reciproco e del quoziente.
La definizione naturale per il reciproco di un reale positivo sarebbe quella di definirlo come il reale localizzato da

$$I_n =\ [\ 1/[a]^n\ ,\ 1/[a]_n\ ]$$

Il problema risiede nel fatto che le frazioni $/[a]^n$ e $1/[a]_n$ non sono in generale decimali finiti ma serie decimali periodiche, il che complica un po' le cose.
C'è forse una via ancora più naturale, però, per definire il reciproco: quella di usare l'algoritmo di Euclide per la divisione, modificato con la virgola, che è applicabile anche ai reali, in quanto richiede solo di eseguire sottrazioni e confronti, operazioni già definite.
Per definire la troncata n-esima di $1/a$ si sottrae ripetutamente da 10^n (si è introdotta la virgola e aggiunti n zeri ad 1) il valore a, sino a che il resto non sia minore di a: il numero di volte che a è stato sottratto, moltiplicato per 10^{-n} (e cioè con la virgola al posto giusto) rappresenta la troncata richiesta. È evidente che, se $a = 0$ il procedimento non finisce mai e non definisce alcunché.

DEFINIZIONE 9 *Dato un reale strettamente positivo a, si definisce il reciproco* $1/a$ *come il numero reale la cui troncata a n cifre è definita dall'algoritmo di Euclide per la divisione* $1 : a$ *(per sottrazioni successive), esteso con l'aggiunta della virgola e di n zeri. Per un reale negativo si definisce come l'opposto del reciproco del suo valore assoluto.*
Si definisce infine il quoziente a/b *come il prodotto* $a \times\ (1/b)$

Un'altra strada è di definire $1/a$ come lo zero della funzione $f(x) = a\,x - 1$. Analogamente si può definire $\sqrt[n]{k}$ come lo zero positivo della funzione $x^n - k$, e $\lg k,\ k > 0$ come lo zero di $e^x - k$. Le verifiche dell'esistenza e dell'unicità di tali zeri, che richiedono di studiare la continuità e la stretta monotonia delle funzioni coinvolte (oltre che provare un delicato teorema di esistenza degli zeri), non sono tutte banali: bisogna, ad esempio, definire "a mano" la funzione esponenziale! Si è fatto cenno ad esse solo per poter concludere queste note definendo la potenza a termini reali.

DEFINIZIONE 10 *Dati a reale strettamente positivo e b reale, si definisce la potenza* a^b *come*

$$a^b \ \equiv\ e^{b\ \lg a}$$

A titolo d'esempio, ricordiamo che, a tutti i fini pratici (limiti, derivazione,...), la funzione x^x è la stessa cosa di $e^{x\ \lg\ x}$.

Conclusioni

La teoria dei numeri reali è stata forse l'ultima ad essere messa a punto, dopo integrali, derivate, continuità e limiti, e funzioni (rigorosamente nell'ordine), forse a causa della sua notevole complessità che permane in tutte le sue versioni: il modello originale di Dedekind, le sezioni nel campo razionale, è forse più elegante, ma a giudizio dell'autore assai più oscuro sulle proprietà fondamentali. Certo, si può parlare di reali come classi d'equivalenza di successioni di Cauchy di razionali, ma chissà chi riuscirà a ravvisarvi un corpo numerico!
Comunque, commenti, suggerimenti e segnalazioni di errori sono graditisimi: per favore, inviarli a p.longo@dma.unipi.it.

Un'ultima nota: non è stato usato mai il simbolo per i reali e per i razionali: i reali vengono denotati con $\mathbb{R}$, i razionali con $\mathbb{Q}$; per pura curiosità aggiungiamo gli interi relativi che si denotano con $\mathbb{Z}$, iniziale del tedesco Zahlen (far di conto). In effetti, la teoria presentata è poco più che far di conto, quel "far di conto": quello delle scuole elementari!