Calcolo della somma dei primi n quadrati.

La formula che dimostreremo per induzione è la seguente:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{1}$$

Tale formula è vera per $n = 1$, quindi il procedimento induttivo può cominciare. Supponiamo che la (1) sia vera per un certo $m \in \mathbb{N}$, cioè supponiamo che

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Dimostriamo ora che da questo deriva che la formula (1) è vera per $n = m + 1$, cioè

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+2+1)}{6}.$$

che è la stessa formula con $m + 1$ che sostituisce m.

Per verificarla osserviamo che

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \sum_{k=1}^{m} k^2 + (m+1)^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2.$$

Bisogna pertanto mostrare che

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+2+1)}{6}$$

Si arriva a ciò con facili passaggi algebrici, osservando che

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 = \frac{m(m+1)(2m+1) + 6(m+1)^2}{6} = (m+1)\frac{m(2m+1) + 6(m+1)}{6}$$
$$= (m+1)\frac{2m^2 + 7m + 6}{6} = (m+1)\frac{(m+2)(2m+3)}{6}.$$

Algoritmo di Erone.

Sia dato un numero $\sqrt{2} < a_0 \in \mathbb{Q}$. Allora si ha che $\frac{2}{a_0} < \sqrt{2}$ e inoltre $\frac{2}{a_0}$ è ancora razionale. Quindi può essere "ragionevole" prendere la media aritmetica tra questi due numeri e studiare se si ottiene una quantità più vicina a $\sqrt{2}$ di quanto non lo fosse a_0. Definiamo quindi una successione per ricorrenza nel seguente modo

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \tag{2}$$

Mostriamo inanzitutto che il procedimento è ben definito, e quindi che se $a_n > \sqrt{2}$ allora anche $a_{n+1} > \sqrt{2}$, con a_{n+1} definito dalla (2). Infatti

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) - \sqrt{2} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} > 0.$$

Vediamo ora che a_{n+1} approssima $\sqrt{2}$ meglio di a_n, infatti $a_n > a_n - \sqrt{2} > 0$ e quindi

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} < \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2(a_n - \sqrt{2})} = \frac{a_n - \sqrt{2}}{2}$$

Pertanto la distanza di a_{n+1} da $\sqrt{2}$ è meno di metà di quella di a_n da $\sqrt{2}$. Riportiamo qui i primi 7 valori di a_n (con 20 cifre decimali corrette e partendo da $a_0 = 2$) da confrontarsi con le prime 20 cifre decimali corrette di $\sqrt{2}$

a_0	2.0000000000000000000
a_1	1.5000000000000000000
a_2	1.416666666666666666
a_3	1.4142156862745098039
a_4	1.4142135623746899106
a_5	1.4142135623730950488
a_6	1.4142135623730950488

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488\ldots$$