Note su o-piccoli e o-grandi

21 novembre 2007

Queste note (molto) informali raccoglono alcuni risultati sul confronto di infinitesimi e di infiniti, metodo che permette di semplificare in maniera significativa il calcolo di alcuni limiti. In particolare questo metodo si può applicare per studiare limiti che coinvolgono somme di funzioni che "vanno a zero con diversa velocità". Come si vedrà il punto cruciale è quello di capire quali siano i termini che realmente contano in un limite che coinvolge più funzioni infinitesime. Cominciamo intanto con una definizione.

Definizione *(o-piccolo di Landau)* Siano f e g due funzioni reali definite almeno[1] in $(a,b)\backslash\{x_0\}$ e <u>infinitesime</u> per x che tende a x_0, cioè

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

Si dice che $f = o(g)$ (e si legge "f è o-piccolo di g") se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Osserviamo che dire che $f = o(g)$ significa circa che: "la funzione f si annulla più rapidamente della funzione g per x che tende a x_0". Esempio elementare puó essere $f(x) = \sin^2(\pi x)$ $g(x) = x - 1$ e $x_0 = 1$.

Osservazione. Con le opportune modifiche (immediate) si possono considerare ugualmente anche limiti all'infinito, cioè funzioni infinitesime per $x \to +\infty$, oppure per $x \to -\infty$.

Enunciamo ora il risultato principale, che spiega come utilizzare questo modo di confrontare due funzioni infinitesime per semplificare il calcolo di alcuni limiti.

Proposizione. *(Principio di sostituzione degli infinitesimi)* Siano f, f_1, g e g_1 funzioni infinitesime per x che tende a x_0 e sia inoltre

$$f_1 = o(f) \qquad g_1 = o(g).$$

Allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

[1] Può bastare che siano definite solo in (x_0, b) e in tal caso i limiti saranno solo limiti per $x \to x_0^+$. Caso analogo con limite sinistro se si ha come dominio solo un (a, x_0) (In realtà basterebbe x_0 punto di accumulazione).

Dimostrazione. Mettiamo in evidenza f a numeratore e g a denominatore (supponiamo che f e g siano diverse da zero almeno in un intorno di x_0), si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\left(1+\frac{f_1(x)}{f(x)}\right)}{g(x)\left(1+\frac{g_1(x)}{g(x)}\right)}.$$

Osserviamo che

$$\lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{f_1(x)}{f(x)}\right) = \lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{g_1(x)}{g(x)}\right) = 1$$

per le ipotesi fatte su f, f_1, g e g_1. Quindi se

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = L$$

(anche i casi con $|L| = +\infty$ o quelli in cui il limite di f/g non esiste si possono trattare nello stesso modo) possiamo applicare il teorema sul limite del prodotto a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\left(1+\frac{f_1(x)}{f(x)}\right)}{g(x)\left(1+\frac{g_1(x)}{g(x)}\right)} = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]\ \lim_{x\to x_0}\left[\frac{\left(1+\frac{f_1(x)}{f(x)}\right)}{\left(1+\frac{g_1(x)}{g(x)}\right)}\right],$$

ottenendo la tesi. $\square$

Osservazione. Può succedere che date due funzioni infinitesime per $x \to x_0$ non si possa dire che $f = o(g)$ oppure che $g = o(f)$, cioè che le due funzioni non siano confrontabili come "o-piccoli". Per esempio se prendiamo $f(x) = x$ e $g(x) = x(2+\sin(1/x))$ si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(2+\sin(1/x))} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\sin(1/x)} = \text{N.E.}$$

e situazione simile considerando il rapporto $g(x)/f(x)$.

Esistono quindi ordini di infinitesimo non confrontabili, almeno con la definizione data sopra. Chi è interessato puó trovare maggiori dettagli e approfondimenti -per esempio- in G. Prodi, *Analisi Matematica*, Boringhieri, § 46, oppure in J.-P. Cecconi-G. Stampacchia, *Lezioni di Analisi Matematica I*, Liguori, §44.

Analogamente alla nozione di o-piccolo si può introdurre quella di o-grande.

Definizione *(o-grande di Landau)* Siano f e g due funzioni reali definite almeno (vedi nota in fondo alla pagina precedente) in $(a,b)\backslash\{x_0\}$. Di dice che $f = O(g)$ (e si legge "f è o-grande di g") se esiste $M \in \mathbb{R}$, con $M \neq 0$, tale che

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = M.$$

Dire che $f = O(g)$ significa circa che: "la funzione f si comporta più o meno nello stesso modo della funzione g per x che tende a x_0". Osserviamo che se $f = O(g)$ allora $g = O(f)$.

Come esempio possiamo calcolare questo limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{1-\cos(x)}-1}{x^2}$$

In questo caso $1-\cos(x) = O(x^2)$ in particolare $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$, quindi il limite sopra si comporta come

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{x^2}{2}}-1}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Questo tipo di sostiuzioni vanno usate con un minimo di cautela, e per ulteriori dettagli vedi in qualsiasi testo di Analisi Matematica, il calcolo dei limiti usando la formula di Taylor.

Usando il confronto di funzioni fatto nel modo esposto sopra si può introdurre una relazione di ordine (affermazione non del tutto corretta, ma andrebbero precisati molti dettagli delicati non del tutto essenziali per il nostro corso) tra le funzioni reali.

È naturale a questo punto avere degli infinitesimi (ma anche degli infiniti) "campione" da usare per poter confrontare rapidamente funzioni non elementari. Come campione di funzione infinitesima, si possono usare le potenze positive di $x - x_0$. In tal caso si ha che

$$(x-x_0)^\alpha = o((x-x_0)^\beta) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha > \beta > 0.$$

Il confronto di funzioni più complicate può essere fatto usando i limiti notevoli. Per esempio come $\log(x) = O(x-1)$ per $x \to 1$.

Il confronto di funzioni può essere usato anche per studiare limiti in cui compaiono funzioni che diventano infinite per $x \to x_0$. In tal caso il confronto può essere fatto confrontando le funzioni date con

$$\log(x), \qquad \text{oppure con } x^\alpha, \text{ con } \alpha > 0 \qquad \text{oppure con } e^x.$$

Sono riportati questi tre esempi perchè rappresentano diverse funzioni che divergono a $+\infty$ quando $x \to +\infty$ con velocità diverse. Ricordando i limiti notevoli il logaritmo cresce meno rapidamente di ogni potenza di x che a sua volta cresce meno rapidamente dell'esponenziale.

Nel caso dei limiti infiniti si ha il seguente risultato

Proposizione. *(Principio di sostituzione degli infiniti)* Siano f, f_1, g e g_1 funzioni che tendono a $+\infty$ per x che tende a x_0 e sia inoltre

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{g_1(x)}{g(x)} = 0,$$

che significa che "f va all'infinito più rapidamente di $f_1(x)$ e che g va all'infinito più rapidamente di $g_1(x)$".

Allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

La dimostrazione è analoga a quella della proposizione precedente.

Se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f(x)} = 0.$$

Si dice anche che "f_1 è un infinito di ordine inferiore a f", mentre se $f = O(g)$ ed entrambe divergono per $x \to x_0$ si dice che sono "infinito dello stesso ordine"

Osservazione. Riassumendo le due proposizioni si ha che:

1) Nel caso di funzioni <u>infinitesime</u> quelle che “contano” sono quelle che <u>vanno a zero meno rapidamente</u>.

2) Nel caso di funzioni che diventano **infinite** quelle che “contano” sono quelle che **vanno a infinito piú rapidamente**.

IMPORTANTE. Errore comune è quello di confondere il VALORE DEL LIMITE con il PUNTO IN CUI SI CALCOLA IL LIMITE. Quando si parla di funzioni infinitesime significa che il limite è uguale a zero, se questo si realizza per $x = 0$, $x = \pm\infty$ o per un qualsiasi altro valore non ha nessuna rilevanza!! Stesso ragionamento per funzioni che diventano infinite. Ricordare per esempio la differenza come negli esempi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + x^2}{x - x^2} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x + x^2}{x - x^2}.$$