Cenni di soluzione

Alcuni esercizi di riepilogo

1. Calcolare $\sqrt[5]{32i}$.

   (**Soluzione**) Con facili calcoli si ottiene che

   $$\sqrt[5]{32i} = \Big\{ 2[\cos(k\pi/10) + i\ \sin(k\pi/10)], \quad k = 0, 1, 2, 3, 4. \Big\}$$

2. Siano v_1 e v_2 due vettori non nulli di $\mathbb{R}^2$. Determinare cosa devono soddisfare i due vettori affinchè

   $$\|v_1 + v_2\| = \|v_1 - v_2\|.$$

   La condizione trovata ha qualche relazione ha con il prodotto scalare?

   (**Soluzione**) Le due grandezze rappresentano le lunghezze delle due diagonali del parallelogrammo costruito a partire da v_1 e v_2. Le diagonali hanno la stessa lunghezza quando il parallelogrammo è un rettangolo, cioè quando v_1 e v_2 e sono ortogonali o

   $$< v_1, v_2 >= 0.$$

   Allo stesso risultato si poteva arrivare anche scrivendo le espressioni analitiche dei due termini a destra e sinistra del segno di uguaglianza, dopo averli quadrati.

3. Determinare l'estremo superiore del seguente insieme

   $$D = \Big\{ x \in \mathbb{R} | \quad \sqrt{-1 + \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)} \in \mathbb{R} \Big\},$$

   (in pratica determinare l'estremo superiore del dominio della funzione di cui sopra).

   (**Soluzione**) La radice ha senso se l'argomento è non-negativo (≥ 0) e quindi in questo caso se e solo se

   $$\sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) = +1.$$

   tale equazione ha come soluzione

   $$\frac{2\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{4}{1+4k}, \qquad \text{per } k \in \mathbb{Z}$$

   da cui si ricava che il l'estremo superiore vale 4, ottenuto quando $k = 0$.

4. Calcolare il seguente limite

   $$\lim_{x\to+\infty} (2x - x\sqrt{x}).$$

   (**Soluzione**) Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\infty - \infty$. Raccogliendo x si ottiene

   $$2x - x\sqrt{x} = x(2 - \sqrt{x})$$

   e quindi si ha il prodotto di un termine che ha come limite $+\infty$ e di uno che ha come limite $-\infty$. Quindi

   $$\lim_{x\to+\infty} (2x - x\sqrt{x}) = -\infty.$$

5. Risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x - y + 5z &= -1 \\ 2x + 4y - 2z &= -2 \\ 3x + 3z &= -3 \end{cases}$$

Calcolare inoltre il rango e la dimensione del nucleo della matrice associata, assieme ad una base sia per il nucleo che per la immagine.

(**Soluzione**) Si può osservare subito che il termine noto (a destra dell'uguale) è uguale alla prima colonna della matrice associata moltiplicata per -1. Ricordando che il sistema di sopra può essere scritto come

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \text{o anche come} \qquad A^1 x + A^2 y + A^3 z = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

dove A^1, A^2 e A^3 sono le colonne della matrice associata A si vede subito che esiste la soluzione $x = -1$ $y = 0$ $z = 0$. Per determinare se tale soluzione è unica si può osservare che il $\mathrm{Det}(A) \neq 0$ e quindi essendo la matrice invertibile si ha la unicità della soluzione. Pertanto $\mathrm{rango}(A) = 3$ $\mathrm{Im}(A) = R^3$ e $\dim \ker(A) = 0$. Allo stesso risultato si poteva arrivare tramite la riduzione a scala.

6. La seguente applicazione $f: \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$ è lineare?

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

(**Soluzione**) Sì la applicazione è lineare come si vede verificando che

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \qquad f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^4 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

7. Calcolare il determinante delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10^4 \end{pmatrix}$$

(**Soluzione**) Con semplici calcoli si trova che

$$\mathrm{Det}(A) = -18$$

Sviluppando secondo Laplace lungo l'ultima riga si ricava che

$$\mathrm{Det}(B) = -1,8 \times 10^5$$

8. Calcolare la derivata prima della seguente funzione

$$f(x) = \cos^2(x)^{\sin(x^2)}.$$

(**Soluzione**)

$$f'(x) = 2\cos^2(x)^{\sin(x^2)}[2\cos(x^2)x\log(\cos(x)) - \sin(x^2)\tan(x)].$$

9. Determinare la immagine di

$$f(x) = \frac{1}{1+\sin(x)}, \qquad x \neq \frac{(1+2k)\pi}{2}.$$

(**Soluzione**) Siccome $x \neq \frac{(1+2k)\pi}{2}$ la funzione $\sin(x)$ non assume mai i valori ± 1 quindi il denominatore in

$$\frac{1}{1+\sin(x)}$$

può assumere tutti i valori tra 0 escluso e 2 escluso. Quindi

$$\mathrm{Im}\Big(\frac{1}{1+\sin(x)}, \quad x \neq \frac{(1+2k)\pi}{2}\Big) =]1/2, +\infty[.$$

10. Dire se la funzione $f(x) = \sqrt[4]{|x|^5}$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

(**Soluzione**) Studiando la funzione si ha

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{x^5} & x \geq 0 \\ \sqrt[4]{-x^5} & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{5}{4}\sqrt[4]{x} & x > 0 \\ \\ -\frac{5}{4}\sqrt[4]{-x} & x < 0 \end{cases}$$

pertanto, calcolando il limite per $x \to 0^{\pm}$ si ha che derivata destra e sinistra per $x = 0$ sono uguali e la funzione è derivabile. In tutti gli altri punti è ovviamente derivabile.

11. Calcolare

$$\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}\, dx.$$

(Suggerimento: moltiplicare e dividere per $\cos(x)$ e usare la formula di integrazione per sostituzione...)

(**Soluzione**)

$$\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}\, dx = \int \frac{1}{\tan(x)\cos^2(x)}\, dx = \int \frac{1}{\tan(x)} \frac{d\tan(x)}{dx}\, dx = \log(|\tan(x)|) + c.$$

12. Calcolare

$$\int_{-\infty}^{-3} \frac{dx}{(x-2)^2}$$

Si ha

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2} = \frac{1}{2-x}$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{-3} \frac{dx}{(x-2)^2} = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{-3} \frac{dx}{(x-2)^2} = \frac{1}{5}$$

13. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 10y' + 25y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

(**Soluzione**) Le radici della equazione caratteristica sono $\lambda = 5$ con molteplicità 2. La soluzione generale è quindi del tipo

$$y(x) = A\mathrm{e}^{5x} + Bx\mathrm{e}^{5x}$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha

$$A = -\frac{1}{\mathrm{e}^5} \qquad B = \frac{1}{\mathrm{e}^5}.$$