Cenni di soluzione

Integrali ed equazioni differenziali

1. Calcolare
$$\int_{-3}^{0} \frac{dx}{x^2-5x+4}$$
(**Soluzione**) Si tratta di una funzione razionale; le due radici del polinomio sono reali e distinte e sono rispettivamente $x_1 = 1$ e $x_2 = 4$. L'intervallo di integrazione non contiene nessuna delle due radici e quindi essendo la funzione da integrare continua su $[-3, 0]$ l'integrale esiste. L'usuale scomposizione permette di trasformarlo in
$$-\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}\frac{dx}{x-4}=\frac{1}{3}\log\left(\frac{x-4}{x-1}\right)\Bigg|_{-3}^{0}=\frac{1}{3}\log\left(\frac{16}{7}\right)$$

2. Calcolare
$$\int \frac{dx}{9+x^2}$$
(**Soluzione**) Applicando la solita tecnica per l'integrazione di funzioni razionali si ottiene
$$\int \frac{dx}{9+x^2}=\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)+c$$

3. Calcolare
$$\int \frac{(x^4+x)dx}{1+x+x^2}$$
(**Soluzione**) Effettuando la divisione si ottiene
$$\frac{x^4+x}{1+x+x^2}=x^2-x+\frac{2x}{1+x+x^2}=x^2-x+\frac{2x+1}{1+x+x^2}-\frac{1}{1+x+x^2}.$$
I primi tre integrali sono immediati in quanto
$$\int\left[x^2-x+\frac{2x+1}{1+x+x^2}\right]dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\log(1+x+x^2)+c$$
Il terzo integrale si calcola osservando le che radici di x^2+x+1 sono complesse e con facili calcoli si ottiene
$$\int\frac{dx}{1+x+x^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right)+c$$
Pertanto
$$\int \frac{(x^4+x)dx}{1+x+x^2}=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\log(1+x+x^2)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right)+c$$

4. Calcolare
$$\int\frac{\cos(t)dt}{\sqrt{\sin(t)}}$$
(**Soluzione**) Ponendo $x = \sin(t)$ si ha $dx/dt = \cos(t)$ e quindi l'integrale si trasforma in
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\left[2\sqrt{x}+c\right]_{x=\sin(t)}=2\sqrt{\sin(t)}+c$$

5. Calcolare
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-|x|}\, dx$$
(**Soluzione**) Dato che la funzione da integrare è pari possiamo calcolare l'integrale nel seguente modo (visto che $|x| = x$ se $x \geq 0$)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-|x|}\, dx = 2\int_{0}^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-|x|}\, dx = \int_{0}^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x}\, dx$$
e ricordiamo inoltre che
$$\int_{0}^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} x^2 \mathrm{e}^{-x}\, dx.$$
Con due integrazioni per parti si ottiene che
$$\int x^2 \mathrm{e}^{-x}\, dx = -\mathrm{e}^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c$$
e quindi
$$\lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} x^2 \mathrm{e}^{-x}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \mathrm{e}^{-b}(b^2 + 2b + 2) + 2 = 2.$$
Pertanto
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-|x|}\, dx = 4.$$

6. Trovarel'integrale generale di
$$y'(x) = \frac{1}{x\log(x)} y(x)$$
(**Soluzione**) Si tratta di una equazione lineare a coefficienti variabili. Quindi
$$y(x) = \mathrm{e}^{\int 1/t \log(t)\, dt} = \mathrm{e}^{\log(\log(x))+c}$$
quindi l'integrale generale risulta
$$y(x) = C\mathrm{e}^{\log(\log(x))} \qquad \text{per } x > 1.$$

7. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'(t) = t\,\mathrm{e}^t y(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
(**Soluzione**) La soluzione risulta essere
$$y(t) = y_0\, \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} z\mathrm{e}^z\, dx}.$$
Osservando però che $y \equiv 0$ è una soluzione del problema richiesto ed essendo la nostra una equazione lineare con soluzione unica, la soluzione cercata è la funzione costantemente 0. Se l'equazione non fosse stata <u>lineare</u> ed <u>omogenea</u> non avremmo in generale potuto concludere che questa era la unica soluzione!

8. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) + 4y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(**Soluzione**) L'equazione caratteristica ha come soluzioni i numeri complessi coniugati

$$\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{15}}{2}$$

pertanto l'integrale generale è

$$y(t) = \mathrm{e}^{t/2}(\alpha\cos(\sqrt{15}t/2) + \beta\sin(\sqrt{15}t/2))$$

Per risolvere il problema di Cauchy andiamo a imporre le condizioni iniziali e si trova che

$$y(0) = \alpha = 1$$

mentre calcolando la derivata prima in zero si ottiene

$$y'(0) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta\sqrt{15}}{2} = 0$$

Quindi

$$\alpha = 1 \quad \text{e} \quad \beta = -\frac{1}{\sqrt{15}}.$$