Derivate e primi studi di funzione

1. Calcolare la derivata prima di $f(x) = \mathrm{e}^{x \arctan(\sin(x))}$

   (**Soluzione**) Si calcola la derivata usando le regole per le funzioni composte e per il prodotto, ottenendo

   $$f'(x) = \mathrm{e}^{x \arctan(\sin(x))}\Big(\arctan(\sin(x)) + \frac{x}{1+\sin^2(x)}\cos(x)\Big)$$

2. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni (si chiamano rispettivamente "coseno iperbolico" e "seno iperbolico")

   $$\cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad \sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

   (**Soluzione**) Si ottiene che

   $$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x) \qquad \frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$$

   quindi in particolare entrambe soddisfano la condizione $y''(x) = y(x)$.

3. Dire se la funzione $f(x) = (x - 2|x|)^2$ è derivabile in $(-1, 1)$

   (**Soluzione**) la funzione in questione è

   $$f(x) = \begin{cases} (3x)^2 & \text{per } -1 < x < 0 \\ (-x)^2 & \text{per } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

   e quindi

   $$f(x) = \begin{cases} 9x^2 & \text{per } -1 < x < 0 \\ x^2 & \text{per } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

   pertanto

   $$f'(x) = \begin{cases} 18x & \text{per } -1 < x < 0 \\ 2x & \text{per } 0 < x < 1 \end{cases}$$

   e calcolando i limiti destri e sinistri della derivata si vede subito che $f'(0)$ esiste e vale 0.

4. Calcolare la derivata prima e seconda di $f(x) = \log|\log|x||$

   (**Soluzione**) Usando la relazione $(\log|f(x)|)' = f'(x)/f(x)$ si ottiene

   $$\frac{d}{dx}\log|\log|x|| = \frac{1}{x\log|x|}$$

   e tale relazione vale in ogni punto del dominio della f, cioè per $x \neq 0, \pm 1$.

5. La funzione $f(x) = x^3 + 2^x$ è invertibile?? Chiamata g la funzione inversa, calcolare $g'(3)$

   (**Soluzione**) La funzione f soddisfa

   $$f'(x) = 3x^2 + 2^x \log 2 > 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

   quindi la funzione f è strettamente monotona e quindi invertibile. Pertanto

   $$g'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3 + 2\log 2}$$

   visto che $f(1) = 3$ oppure, equivalentemente, $g(3) = 1$.

6. Sia data la funzione $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$ sull'intervallo $[0,1]$. Dire se le ipotesi del teorema di Lagrange sono soddisfatte e determinare il "punto ξ".

   (**Soluzione**) Inanzitutto la funzione in questione è continua e derivabile su tutta la retta reale, quindi le ipotesi sono soddisfatte. Dobbiamo trovare un punto $\xi \in]0,1[$ tale che

$$\frac{f(1) - f(0)}{1-0} = \frac{2-0}{1-0} = 2 = f'(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi + 2.$$

   L'equazione di secondo grado

$$3\xi^2 - 2\xi + 2 = 2 \quad \text{o anche} \quad 3\xi^2 - 2\xi = 0$$

   ammette come soluzioni

$$\xi_1 = 0 \qquad \xi_2 = \frac{2}{3}.$$

   La prima soluzione va "scartata" nel senso che il teorema di Lagrange assicura l'esistenza di un punto interno all'intervallo $[0,1]$ in cui la derivata prima assume il valore $(f(1) - f(0))/(1-0)$. In particolare si osservi che nelle ipotesi del teorema è richiesto che non la funzione f sia derivabile almeno nei punti interni dell'intervallo.

7. Studiare i limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \log(\cos(x))}{x\sin(x)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin(x))}{\sin(2x)}$$

   (**Soluzione**) Si tratta di due forme indeterminate del tipo "zero su zero", le ipotesi per applicare i teoremi di de L'Hôpital ci sono e per il primo limite, per semplificare i calcoli ragioniamo come segue

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \log(\cos(x))}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \log(\cos(x))}{x^2} \frac{x}{\sin(x)}$$

   Il secondo termine è un limite notevole mentre per il primo termine calcoliamo le derivata di numeratore e denominatore ottenendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) + \tan(x)}{2x}$$

   E questo limite non esiste perchè

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x) + \tan(x)}{2x} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(x) + \tan(x)}{2x} = -\infty$$

   quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x) - \log(\cos(x))}{x\sin(x)} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x) - \log(\cos(x))}{x\sin(x)} = -\infty.$$

   Il secondo limite è più semplice infatti calcolando le derivate di numeratore e denominatore si passa a studiare il limite (che non è una forma indeterminata)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}}{2\cos(2x)} = \frac{1}{2}$$

   e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin(x))}{\sin(2x)} = \frac{1}{2}$$

8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione pari e derivabile. Mostrare che f' è una funzione dispari.

   (**Soluzione**) Assumiamo che f sia pari, cioè che

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e usiamolo per mostrare che
$$f'(-x) = -f'(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
Scrivendo il rapporto incrementale in un generico punto $x \in \mathbb{R}$ e si ottiene

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \{\text{usiamo ora che } f \text{ è pari}\} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \\ &= \{\text{se poniamo } k = -h\} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x+k) - f(x)}{-k} = -\lim_{k\to 0} \frac{f(x+k) - f(x)}{k} = -f'(x). \end{aligned}$$

9. Determinare l'immagine di
$$f(x) = \sin(x)\cos(2x) \qquad x \in [0, \pi/2]$$

(**Soluzione**) La funzione f è continua e quindi assume massimo e minimo sull'intervallo $[0, \pi/2]$. Calcolando f' si ottiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x)\cos(2x) - 2\sin(x)\sin(2x) = \{\text{usando le formule di duplicazione di seno e coseno}\} = \\ &= \cos(x)(\cos^2(x) - \sin^2(x)) - 4\sin^2(x)\cos(x) = \{\text{usando l'identità } \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)\} = \\ &= \cos(x)(1 - 6\sin^2(x)) \end{aligned}$$

Andando allo studio del segno di f' si osserva che il coseno è sempre positivo in $]0, \pi/2[$ (ricordiamo che è nei punti di minimo/massimo interni che la derivata deve valere zero, gli estremi vanno trattati a parte!) Quindi si ha che

$$f' > 0 \quad \text{se e solo se} \quad \sin^2(x) < \frac{1}{6}, \quad \text{cioè quando} \quad -\frac{1}{\sqrt{6}} < \sin(x) < \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

La prima diseguaglianza è verificata automaticamente perchè in $]0, \pi/2[$ il seno è sempre positivo. La seconda si verifica se $x < \arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}$. Si ha quindi un cambio di segno in $x = \arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}$ e la natura è quella di massimo interno. Si tratta ora di capire qual è il valore minimo (il minimo non può essere in un punto interno) tra tra
$$f(0) = 0 \qquad f(\pi/2) = -1.$$
Il valore del massimo $f(\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}})$ si può calcolare esattamente grazie alla seguente osservazione, che deriva ancora dalla formula di duplicazione del coseno

$$f(x) = \sin(x)\cos(2x) = \sin(x)(1 - 2\sin^2(x))$$

e quindi
$$f(\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}) = \sin(\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}})(1 - 2\sin^2(\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}})) = \frac{2}{3\sqrt{6}}.$$
Quindi l'immagine della f è l'intervallo $[-1, 2/3\sqrt{6}]$.

10. Data la ellisse di equazione $x^2/4 + y^2/9 = 1$ trovare il rettangolo iscritto di area massima

(**Soluzione**) Si tratta di una ellisse con semiassi di lunghezza 2 e 3 e ogni rettangolo iscritto avrà i lati paralleli agli assi delle coordinate. Supponeniamo che i lati verticali del rettangolo intersechino l'asse nei punti di ascissa x e $-x$ (quindi la base del rettangolo sarà lunga $2x$). Per calcolare la altezza del rettangolo osserviamo che nel semispazio superiore i punti dell'ellisse soddisfano l'equazione

$$y = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

e quindi l'altezza del rettangolo inscritto che taglia l'asse delle ascisse nei punti x e $-x$ sarà uguale a $6\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$.

Quindi la funzione da studiare (area del rettangolo) risulta

$$f(x) = 12x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

con la limitazione che $0 \leq x \leq 2$ (il punto x non può essere esterno alla ellisse!!) Osserviamo che $f(x) \geq 0$ (deve essere così visto che si tratta di una area), inoltre $f(0) = f(2) = 0$. Calcoliamo la derivata prima

$$f'(x) = \frac{6(2 - x^2)}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}$$

Essa si annulla nel solo punto $x = \sqrt{2}$ (in punto $-\sqrt{2}$ non fa parte del dominio!) e lo studio del segno implica che si tratta di un massimo. Il rettangolo in questione è quello con vertici

$$\left(\sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\sqrt{2}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\sqrt{2}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

11. Studiare il grafico di $f : x \to \sinh(x)$.

(**Soluzione**) La funzione $\sinh(x)$ è definita per $\in \mathbb{R}$; dalle proprietà dell'esponenziale si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \sinh(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$$

inoltre $f'(x) = \cosh(x) > 0$. Quindi la funzione è strettamente crescente e $\sinh(0) = 0$. Quindi $\sinh(x) < 0$ per $x < 0$ e $\sinh(x) > 0$ per $x > 0$. Se studiamo anche la derivata seconda si ha che

$$\frac{d^2 \sinh(x)}{dx^2} = \sinh(x)$$

e quindi che la funzione ha la convessità (legata al segno della derivata seconda) rivolta verso l'alto per $x > 0$ e verso il basso per $x < 0$.