Cenni di soluzione

0. Calcolare il determinante della seguente matrice 12x12

$$A = \left(\begin{array}{ccc} & & 1 \\ & I_{11} & 0 \\ & & \vdots \\ & & 0 \\ 1\,0\ldots\,0 & & 1 \end{array} \right)$$

Cioè il blocco quadrato 11x11 in alto a sinistra è la matrice identica 11x11; l'ultima riga e l'ultima colonna sono fatte da tutti zeri, eccetto che il primo e l'ultimo termine.

(Soluzione) Se si osserva attentamente la matrice si può notare che la prima colonna è uguale all'ultima, quindi il determinante è uguale a zero.

Funzioni Continue

1. Calcolare estremo inferiore e superiore di A

$$A = \{y = \sin(x)\frac{x^2}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}^+\}$$

(Soluzione) La funzione $f(x) = x^2/(x^2+1)$ è monotona crescente per $x \geq 0$ (verificarlo!!), si annulla in 0 e tende ad 1, per $x \to +\infty$. Pertanto, dato che tale funzione è moltiplicata per $\sin(x)$ che oscilla tra -1 e 1 il prodotto oscillerà raggiungendo valori sempre più prossimi sia ad 1 che a -1, senza però mai assumerli.

Questa non è però una dimostrazione! Per essere precisi consideriamo due successioni $x_k = \pi/2 + 2k\pi$ e $y_k = 3\pi/2 + 2k\pi$. Si ha che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_k^2}{x_k^2+1} = \lim_{k\to+\infty} \frac{y_k^2}{y_k^2+1} = 1$$

Quindi

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k) = 1 \qquad \text{mentre} \qquad \lim_{k\to+\infty} f(y_k) = -1$$

Quindi la funzione f si avvicina sia a 1 che a -1 (lungo 2 successioni diverse). Per dimostrare che questi ultimi sono rispettivamente "sup" e "inf" basta osservare che

$$-1 \leq f(x) \leq 1.$$

1 è quindi un maggiorante ed è il minimo dei maggioranti perchè visto che $f(x_k) \to 1$ quando $k \to +\infty$ si ha che la nessun numero più piccolo di 1 può essere maggiorante. Analogo per l'estremo inferiore.

2. Sia data la funzione

$$f(x) = (x^2 + \sqrt{x} + e^3)\sin(\pi x)$$

e siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ le successioni definite da

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 1 \\ a_1 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_{n+1} = b_n \\ b_1 = 1/2 \end{cases}$$

Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) \qquad \lim_{n\to+\infty} f(b_n)$$

(Soluzione) Cominciamo a scrivere esplicitamente chi è a_n: osserviamo che $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_3 = 5$ e cosìvia. In tal modo si ha che

$$a_n = n + 2.$$

In particolare a_n è sempre appartenente ai numeri naturali (dimostrarlo per induzione!) e quindi $f(a_n) = 0$. Questo mostra che $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = 0$. (A volte scrivere i primi termini definita per ricorrenza "*può*" aiutare a capire il suo comportamento).

La seconda successione invece è costante. Infatti

$$b_{n+1} = b_n = b_1 = \frac{1}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Quindi

$$f(b_n) = f(b_1) = f(1/2) = \left(\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{2}} + e^3\right), \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e questo mostra che $\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(1/2)$.

3. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

(Soluzione) Osserviamo che

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{n\cdot \quad n \quad \cdot \quad n\ldots\ldots n\cdot n\cdot n} < \frac{1}{n}$$

(i primi $n-1$ termini del prodotto sono tutti minori od uguali ad 1) e quindi per il teorema del confronto $\lim_{n\to+\infty} n!/n^n = 0$.

4. Studiare

$$\lim_{x\to+\infty} \tan(x)$$

(Soluzione) Osserviamo che se valutiamo la funzione $\tan(x)$ nei punti $x_k = k\pi$ e $y_k = \pi/4 + k\pi$ si ha

$$\tan(x_k) = 0 \qquad \tan(y_k) = 1$$

e quindi il limite non può esistere perchè il limite -se esiste- deve essere lo stesso lungo qualsiasi successione che va verso $+\infty$.

5. Sia $\{a_n\}$ una successione monotona crescente (cioè $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$) e limitata superiormente. Mostrare che a_n ammette limite e in particolare

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

(Soluzione) Osserviamo che l'insieme di numeri a_n

$$A = \{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$$

è limitato superioremente (attenzione a non fare confusione tra l'indice n -che non è limitato- e il "valore" della successione a_n. Ricordare che una successione è una particolare funzione reale, definita solo sui numeri interi).

Chiamiamo $L = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n < +\infty$; visto che L è l'estremo superiore esso è il minimo dei maggioranti. Pertanto, ogni numero minore di L non può essere un maggiorante e quindi per ogni $\epsilon > 0$ esiste almeno un numero $\overline{N} \in \mathbb{N}$ (dipendente da ϵ) tale che

$$a_{\overline{N}} > L - \epsilon.$$

Quindi siccome $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$L - \epsilon < a_{\overline{N}} \leq a_n \leq L, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \overline{N}.$$

La prima diseguaglianza vale dato che la successione è crescente, l'ultima perchè L è un maggiorante. Questo mostra che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L$$

perchè

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \overline{N} \in \mathbb{N} \text{ t.c.} \qquad |a_n - L| < \epsilon, \qquad \forall n > \overline{N}.$$

6. Dire se la seguente funzione è continua

$$f(x) = \begin{cases} (e^x e^{-1} - 1)/(x-1) & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ x^3 - 2x^2 + x + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

(Soluzione) Bisogna controllare se i due limiti

$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x)$$

esistono e sono uguali al valore che la funzione assume per $x = 1$. Si ha

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (e^x e^{-1} - 1)/(x-1) = \lim_{y\to 0^-} \frac{e^y - 1}{y} = 1.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^3 - 2x^2 + x + 1 = 1$$

e quindi la funzione f è continua nel punto 1. In tutti gli altri punti è ovviamente continua.

7. Mostrare che la funzione

$$f(x) = x^{100} + 746x^{37} + \pi x^{14} - 10^{-9}$$

si annulla almeno due volte. Inoltre una delle radici positive si trova nell'intervallo [0,1]

(Soluzione) Si ha che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty,$$

e quindi esistono due punti $M_1 < 0$ e $M_2 > 0$ tale che

$$f(M_1) > 0 \qquad f(M_2) > 0,$$

mentre $f(0) = -10^{-9} < 0$. Applicando il teorema degli zeri negli intervalli $[M_1, 0]$ e $[0, M_2]$ si dimostra che in ogni intervallo esiste almeno uno zero.

Se osserviamo che $f(1) = 1 + 746 + \pi - 10^{-9} > 0$ allora applicando il teorema degli zeri nell'intervallo $[0, 1]$ si dimostra l'esistenza di uno zero in questo intervallo.

8. La funzione $\tan(x)$: $\mathbb{R}\backslash\{k\pi/2\} \to \mathbb{R}$ è continua? Può essere definita opportunamente in $k\pi/2$ in modo da renderla una funzione continua su tutta la retta reale?

(Soluzione) Sì, si tratta di una funzione continua perchè rapporto di funzioni continue e il denominatore non si annulla mai.

La funzione può essere definita opportunamente in $x_k = k\pi/2$ quando k è pari, perchè in tali punti esistono limite destro e sinistro e valgono entrambi zero.

Nei punti $x_k = k\pi/2$ quando k è dispari la funzione non può essere definita in maniera da renderla continua, perchè

$$\text{se } k \text{ è dispari} \quad \lim_{x\to k\pi/2^-} \tan(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to k\pi/2^+} \tan(x) = -\infty$$

9. La funzione $e^{\sin(x)}$ è continua?

(Soluzione) Sì, è continua perchè è composizione di funzioni continue.

10. La funzione f : $[1,3[\cup]3,8] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ 12^4 & \text{se } 3 < x \leq 8 \end{cases}$$

è continua?? $f(1) < 0$ $f(8) > 0$, ma esistono punti in cui f si annulla??

(Soluzione) Sìı, la funzione è continua, ma non si annulla mai. Il teorema degli zeri non funziona in questo caso, perchè la funzione non è definita su un intervallo, ma su di una "unione" di intervalli.