Cenni di soluzione

Applicazioni lineari e matrici

1. L'applicazione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1$$

è lineare?

(Soluzione) Sì, l'applicazione è lineare come si vede verificando che

$$a)\ f(v+w) = f(v) + f(w) \qquad b)\ f(\lambda v) = \lambda f(v)$$

Questa applicazione è la "proiezione" sulla prima coordinata e ovviamente anche la applicazione (proiezione sulla i−esima coordinata) $\Pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$\Pi_i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_i \qquad i = 1, \dots, n$$

è lineare.

2. L'applicazione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 - x_2$$

è lineare?

(Soluzione) Sì, infatti se $v = (v_1, v_2)^T$ e $w = (w_1, w_2)^T$

$$f(v+w) = v_1 + w_1 - (v_2 + w_2) = v_1 - v_2 + w_1 - w_2 = f(v) + f(w)$$

inoltre

$$f(\lambda v) = \lambda v_1 - \lambda v_2 = \lambda(v_1 - v_2) = \lambda f(v).$$

3. L'applicazione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3x_1 x_2$$

è lineare?

(Soluzione) No, non è lineare come si vede osservando, in particolare, che non è sempre vero che $f(\lambda v) \neq \lambda f(v)$ (In particolare quando $\lambda \neq 0, 1, -1$).

4. L'applicazione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \sin(x_1) + \sin(x_2)$$

è lineare?

(Soluzione) No, anche in questo caso in generale, $f(\lambda v) \neq \lambda f(v)$.

Esiste una applicazione lineare $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

(Soluzione) Siccome una applicazione lineare è determinata in maniera univoca dal valore che assume su di una base e $(1,2)^T$ $(2,-1)^T$ formano una base di $\mathbb{R}^2$ (verificare) una applicazione che soddisfa le prime due condizioni esiste ed è unica e la matrice associata (rispetto alla base data e non rispetto alla base canonica!!) alla applicazione f è:

$$A_f=\begin{pmatrix}2&1\\2&2\end{pmatrix}$$

Una applicazione che soddisfa le tutte e le tre condizioni può esistere solo se il suo valore sul vettore $(3,1)^T$ è esattamente $(1,2)^T$. Osserviamo che

$$f\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\quad \text{quindi } f\left(\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Quindi il vettore $(-1,-2)^T \in \mathrm{Ker}f$. Osservando che A_f ha rango uguale a 2, il teorema della dimensione ci assicura che $\dim \mathrm{Ker}f = 0$ e quindi è impossibile avere un elemento diverso dallo zero nel nucleo. La applicazione cercata quindi non esiste.

Esiste una applicazione lineare $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

(Soluzione) Il problema è simile a quello precedente e ancora si tratta di vedere se l'ultima condizione è "compatibile" con le prime due. Per fare questo scriviamo $(3,1)^T$ in termini dei vettori $(1,2)^T$ $(2,-1)^T$.

Si tratta quindi di risolvere

$$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema lineare porta ad $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

Pertanto (usando la linearità)

$$f\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=f\left(1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right)=1\cdot f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+1\cdot f\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}.$$

Quindi la applicazione esiste ed è quella determinata dalla matrice A_f dell'esercizio precedente (Rispetto alla base $(1,2)^T$ $(2,-1)^T$. Si osservi che la stessa applicazione, se scritta in termini della base canonica, è rappresentata da una matrice diversa).

Discutere le seguenti proposizioni

(a) Esiste una applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ iniettiva
(Soluzione) Sì, basta che il rango della applicazione sia uguale a 3. In tal caso il Ker ha dimensione 0 e la applicazione è iniettiva (essendo lineare!).

(b) Esiste una applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ iniettiva
(Soluzione) Anche in questo caso il ker ha dimensione 0 se il rango è uguale a 3. Una possibile applicazione è quella che scritta in forma di matrice è

$$A_f=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Nota. $\mathrm{Im}(A_f)=\{x\in\mathbb{R}^4:\ (x_1,x_2,x_3,0)\}$.

(c) Esiste una applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ iniettiva

(**Soluzione**) No, non può esistere, dato che ogni applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ha rango ≤ 2. Pertanto per il teorema della dimensione $3 = \dim(\ker T) + Rg(T)$ e quindi $\dim(\ker T) \geq 1$ e quindi T non può essere iniettiva.

(d) Esiste una applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ surgettiva

(**Soluzione**) Il rango di una applicazione $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ è sempre minore o uguale a 3 (il minimo tra numero di righe e di colonne) e quindi la dimensione dell'immagine di T è sempre minore di 4. Pertanto una applicazione surgettiva $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ non può esistere.

(e) Esiste una applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ surgettiva

(**Soluzione**) Sì, basta che $\mathrm{Rg}(T) = 3$. In tal caso ricordiamo che una applicazione $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ è iniettiva se e solo se è surgettiva.

(f) Esiste una applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ surgettiva

(**Soluzione**) Sì, basta che il $\mathrm{Rg}(T) = 2$. Per esempio basta esibire la applicazione che sulla base si comporta così

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8. Esiste una matrice $A \in \mathcal{M}(2 \times 2)$ non nulla tale che $A^2 = 0$??

(**Soluzione**) Sì, per esempio basta considerare la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E nel caso della matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & -25/\pi \\ \pi & -5 \end{pmatrix}$$

cosa succede?? Trovare la matrice 2x2 più generale che elevata al quadrato si annulla.

9. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

determinare

(a) se esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^2$ $v \neq 0$ tale che $Av = 0$

(**Soluzione**) Sì, basta calcolare il $\mathrm{Ker}(A)$ e risolvendo il sistema omogeneo si trova

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Span} < (1, -2)^T >$$

(b) se esiste una matrice $X \in \mathcal{M}(2 \times 2)$ tale the $AX = 0$

(**Soluzione**) Osserviamo che se la matrice X viene scritta come $X(= X^1|X^2)$ dove X^i sono i due vettori colonna, allora

$$AX = (AX^1|AX^2)$$

(convincersi di questa affermazione!!! È importante tanto quanto quella sulla risolubilità di un sistema quando il termine noto si scrive come combinazione lineare delle colonne. Questo fatto è alla base del metodo per il calcolo della inversa basato sulla eliminazione di Gauss)

Quindi se vogliamo che AX sia uguale alla matrice nulla, bisogna che X^1 e X^2 stiano nel nucleo di A. La soluzione è quindi

$$X = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -2\lambda & -2\mu \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

10. Calcolare, se esiste, l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcolare inoltre $(A^T)^{-1}$ cioè la matrice inversa della trasposta e confrontarla con A^{-1}

(Soluzione)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Inoltre si verifica che

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Questo è un risultato generale: la trasposta della inversa è uguale alla inversa della trasposta. Infatti

$$(AA^{-1}) = Id \quad \rightarrow (AA^{-1})^T = Id^T = Id \quad \rightarrow (A^{-1})^T A^T = Id$$

L'ultima uguaglianza implica che $(A^{-1})^T$ (cioè la trasposta della inversa) è la matrice inversa di A^T, cioè $(A^T)^{-1}$ che è la inversa della trasposta.