Cenni di soluzione

Numeri Complessi

1. Sia $z = 1 - 3i$: scriverlo in forma trigonometrica
   (**Soluzione**) $z = \sqrt{10}\big[\cos(\arctan(3)) - i\sin(\arctan(3)\big]$
2. Sia $z = 2 - 3i$. Calcolare z^{-2}
   (**Soluzione**) $z^{-2} = \frac{-5+12i}{169}$
3. Risolvere $z^2 - 6iz - 1 = 0$
   (**Soluzione**) $z_1 = (3 + 2\sqrt{2})i$, $z_2 = (3 - 2\sqrt{2})i$
4. Calcolare $\sqrt[4]{2 - 2i}$
   (**Soluzione**) Siccome $|z| = \sqrt{8}$ e $\theta = -\pi/4$ le radici sono
   $$\Big\{z = 8^{1/8}\big[\cos(-\pi/16 + k\pi/2) + i\sin(-\pi/16 + k\pi/2)\big]\ k = 0, 1, 2, 3\Big\}$$
5. Risolvere $z^3 - 2z^2 - 2z + 1 = 0$
   (**Soluzione**) Si vede che $z = -1$ annulla il polinomio, quindi $z^3 - 2z^2 - 2z + 1 = 0$ è divisibile per $z + 1$. Dopo aver effettuato la divisione (tra polinomi) ci si riduce a un polinomio di secondo grado le cui radici sono $z_{1/2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$
6. Risolvere $|z + 1| \le |z|$
   (**Soluzione**) Dopo aver scritto $z = x + iy$ si trova con facili calcoli che la soluzione è data dall'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(z) \le -1/2$.
7. Determinare (disegnare) l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\mathrm{Re}(z) \ge \mathrm{Im}(z)$
   (**Soluzione**) Si tratta del semispazio inferiore delimitato dalla bisettrice (inclusa) del I quadrante
8. Determinare (disegnare) l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z + 2i| < 3$
   (**Soluzione**) Si tratta della circonferenza (col bordo escluso) centrata in $z_0 = (0, -2i)$ e di raggio $R = 3$.

Estremo superiore, inferiore...

Calcolare le seguenti quantità (verificare che valgono le due proprietà che definiscono estremo inferiore e superiore)

1. $\sup\{x :\ \log_3(x) \le 4\}$
   (**Soluzione**) 3^4 ed è massimo
2. $\sup\left\{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}\right\}$
   (**Soluzione**) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 1\right)$ è massimo e si vede osservando che la funzione seno è decrescente tra $\pi/2$ e $3\pi/2$.
3. $\inf\left\{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}\right\}$
   (**Soluzione**) -1 come sopra ma non è un minimo.
4. $\inf\left\{1 - \frac{n-3}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$
   (**Soluzione**) 0 perchè la funzione è decrescente (non è minimo)

5. $\inf\left\{1-\frac{n+4}{n},\ n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}\right\}$

   (**Soluzione**) -4 in questo caso è anche minimo

6. $\inf\{y\in\mathbb{R}:\ y=x^2-\sqrt{8}x+2,\ x\in\mathbb{Q}\}$

   (**Soluzione**) 0 ma non è minimo perchè $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

7. $\inf\{n^2-6n+1,\ n\in\mathbb{N}\}$

   (**Soluzione**) -8 ed è anche il minimo. Si verifica osservando che la funzione è positiva per $n=1$ e $n>5$, quindi basta controllare $n=2,3,4\dots$

8. Mostrare usando il principio di induzione che

$$\forall\, q\neq 1 \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

   (**Soluzione**) Per $n=1$ è vera. Supponiamola vera per un certo n e verifichiamola per $n+1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k=\sum_{k=0}^{n} q^k+q^{n+1}=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+q^{n+1}=\frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q}=\frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q}=\frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

Limiti

Studiare i seguenti limiti

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(\cos^2(x))}{(3x)^2}$

   (**Soluzione**) Scriviamo il limite in modo da ricondurci ai limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos^2(x))}{(3x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\cos^2(x)-1)}{\cos^2(x)-1}\frac{\cos^2(x)-1}{(3x)^2}$$

   Il primo termine ha come limite 1 (è un limite notevole!) il secondo termine si trasforma in

$$\frac{1}{9}\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x)-1}{(3x)^2}=\frac{1}{9}\lim_{x\to 0}\frac{(\cos(x)-1)(\cos(x)+1)}{x^2}=-\frac{1}{9}$$

   Quindi il limite cercato vale $-1/9$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1}$

   (**Soluzione**) con la sostituzione $y=x-1$ il limite diventa

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin(\pi y+\pi)}{y}=-\lim_{y\to 0}\frac{\sin(\pi y)}{y}=-\pi\lim_{y\to 0}\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}=-\pi$$

3. $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{\tan(x/2)}}{x-2}$

   (**Soluzione**) Il numeratore va verso un limite finito diverso da zero e il denominatore ha come limite 0^- quindi il limite cercato vale $-\infty$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x\cos(1/x)-1}{2x^2+x(1-\cos(1/x))}$

   (**Soluzione**) Raccogliendo x^2 a numeratore e denominatore e osservando che $\cos(1/x)$ è limitato si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x\cos(1/x)-1}{2x^2+x(1-\cos(1/x))}=\frac{1}{2}$$

5. $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{x^2}-\cos(x)}{\pi \sin^2 x}$

(**Soluzione**) Scriviamo il limite come

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{x^2}-\cos(x)}{\pi \sin^2 x} = \frac{1}{\pi} \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{x^2}-1+1-\cos(x)}{x^2} \frac{x^2}{\sin^2 x}$$

il secondo termine ha come limite 1, mentre il primo diventa

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} + \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = 1 + \frac{1}{2}$$

Il limite cercato vale quindi $3/2\pi$.

6. $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sin(x)}{x}$

(**Soluzione**) Il seno è sempre limitato, quindi il limite vale 0.

7. $\lim_{x\to 2} \begin{cases} x+1 & \text{se } x>2 \\ 4 & \text{se } x=2 \\ \dfrac{\sin(3(x-2))}{x-2} & \text{se } x<2 \end{cases}$

(**Soluzione**) Limite destro e sinistro valgono 3, quindi il limite esiste e vale 3, anche se la funzione assume il valore 4 per $x=2$.

8. Sia $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}$ una funzione monotona decrescente, tale che $f(x)>2$ per tutti gli $x\in]3,\infty[$. Dimostrare che esiste $L\in\mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$$

Discutere che valori può assumere L.

(**Soluzione**) L deve essere maggiore o uguale a 2, vedi lezione per la esistenza del limite

9. Siano $f(x)=2+\cos(x)$ e $g(x)=\sin(x)/x$ definite per $x\neq 0$. Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \min\{f,g\}$$

(**Soluzione**) Siccome $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ allora la funzione g sarà minore di $3/2$ in tutto un intorno bucato di zero $\mathcal{U}_1$ (conseguenza del teorema della permanenza del segno);visto che $\lim_{x\to 0} f=3$ e si ha che in un altro intorno bucato $\mathcal{U}_2$ si avrà $f>5/2$ quindi in $\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2$

$$g\leq f.$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0}\min\{f,g\} = \lim_{x\to 0} g = 1$$

Spazi vettoriali

Notazione: Sia V uno spazio vettoriale e $v_i\in V$ $i=1,\ldots,k$. Con

$$\text{Span} < v_1,\ldots,v_k\}$$

si indica lo "spazio generato" dai vettori $v_1,\ldots,v_k$ cioè l'insieme di tutte le combinazioni lineari

$$\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_k v_k, \qquad \alpha_i\in\mathbb{R} i=1,\ldots,k.$$

1. Determinare se i seguenti vettori sono linearmente indipendenti

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

   I vettori $\{v_1, v_2, v_3\}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$?

   (**Soluzione**) Dopo aver effettuato la riduzione a scala (non è l'unico metodo di soluzione) della matrice $(v_1|v_2|v_3)$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   che ha rango 2, quindi i vettori non sono linearmente indipendenti e non possono formare una base di $\mathbb{R}^3$.

2. I vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   sono una base di $\mathbb{R}^3$?

   (**Soluzione**) No, non possono essere una base di $\mathbb{R}^3$ perchè tutte le basi di $\mathbb{R}^3$ sono formate da 3 elementi.

3. I vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   sono linearmente indipendenti?

   (**Soluzione**) Si sono linearmente indipendenti perchè la riduzione a scala della matrice $(v_1|v_2)$ è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   che ha rango 2.

4. Siano dati

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   è vero che Span $< v_1, v_2 >= \mathbb{R}^2$

   (**Soluzione**) Si, i due vettori sono linearmente indipendenti e quindi lo spazio generato ha dimensione 2 e pertanto essi sono una base di $\mathbb{R}^2$.

5. "Completare" i seguenti vettori ad una base

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(**Soluzione**) Ovviamente i primi due vettori sono linearmente dipendenti, quindi non si possono semplicemente aggiungere 3 vettori di $\mathbb{R}^5$ per ottenere una base (i vettori di una base sono linearmente indipendenti!)

Eliminando il vettore v_2 però $\{v_1, v_3\}$ puó essere completato ad una base.

6. Dire se i seguenti vettori sono linearmente dipendenti

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(**Soluzione**) Si. Non possono essere linearmente indipendenti perchè il numero massimo di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^3$ è 3.

7. Risolvere tramite l'eliminazione di Gauss il sistema

$$\begin{pmatrix} -7x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 7x_4 & = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 6x_4 & = 8 \\ -3x_1 - 6x_2 + x_3 - 6x_4 & = 2 \\ 2x_1 - 5x_2 - 7x_3 & = -8 \end{pmatrix}$$

(**Soluzione**)

$$x_1 = -\frac{9968}{1319},\ x_2 = -\frac{2798}{1319},\ x_3 = \frac{658}{1319},\ x_4 = \frac{7452}{1319}$$

8. Risolvere tramite l'eliminazione di Gauss il sistema

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_2 & = -1 \\ x_2 - x_3 & = -1 \\ x_3 - x_4 & = -1 \\ -x_4 & = -1 \end{pmatrix}$$

(**Soluzione**)

$$x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1$$