

0. Calcolare il determinante della seguente matrice 12x12

$$A = \begin{pmatrix} & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & & & 0 & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cioè il blocco quadrato 11x11 in alto a sinistra è la matrice identica 11x11; l'ultima riga e l'ultima colonna sono fatte da tutti zeri, eccetto che il primo e l'ultimo termine.

### Funzioni Continue

1. Calcolare estremo inferiore e superiore di A

$$A = \left\{ y = \sin(x) \frac{x^2}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

2. Sia data la funzione

$$f(x) = (x^2 + \sqrt{x} + e^3) \sin(\pi x)$$

e siano  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  le successioni definite da

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 1 \\ a_1 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} b_{n+1} = b_n \\ b_1 = 1/2 \end{cases}$$

Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n)$$

3. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n}$$

4. Studiare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tan(x)$$

5. Sia  $\{a_n\}$  una successione monotona crescente (cioè  $a_{n+1} \geq a_n \forall n \in \mathbb{N}$ ) e limitata superiormente. Mostrare che  $a_n$  ammette limite e in particolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

6. Dire se la seguente funzione è continua

$$f(x) = \begin{cases} (e^x e^{-1} - 1)/(x - 1) & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ x^3 - 2x^2 + x + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

7. Mostrare che la funzione

$$f(x) = x^{100} + 746x^{37} + \pi x^{14} - 10^{-9}$$

si annulla almeno due volte. Inoltre una delle radici positive si trova nell'intervallo  $[0,1]$

8. La funzione  $\tan(x) : \mathbb{R} \setminus \{k\pi/2\} \rightarrow \mathbb{R}$  è continua? Può essere definita opportunamente in  $k\pi/2$  in modo da renderla una funzione continua su tutta la retta reale?
9. La funzione  $e^{\sin(x)}$  è continua?
10. La funzione  $f : [1, 3[ \cup ]3, 8] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ 12^4 & \text{se } 3 < x \leq 8 \end{cases}$$

è continua??  $f(1) < 0$   $f(8) > 0$ , ma esistono punti in cui  $f$  si annulla??