Applicazioni lineari e matrici

1. L'applicazione $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1$$
è lineare?

2. L'applicazione $f\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 - x_2$$
è lineare?

3. L'applicazione $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3x_1x_2$$
è lineare?

4. L'applicazione $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \sin(x_1) + \sin(x_2)$$
è lineare?

5. Esiste una applicazione lineare $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che
$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6. Esiste una applicazione lineare $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che
$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

7. Discutere le seguenti proposizioni
   (a) Esiste una applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ iniettiva
   (b) Esiste una applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ iniettiva
   (c) Esiste una applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ iniettiva
   (d) Esiste una applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ surgettiva
   (e) Esiste una applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ surgettiva
   (f) Esiste una applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ surgettiva

8. Esiste una matrice $A \in \mathcal{M}(2 \times 2)$ non nulla tale che $A^2 = 0$??

9. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$
determinare

(a) se esiste un vettore $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$ tale che $Av = 0$

(b) se esiste una matrice $X \in \mathcal{M}(2 \times 2)$ tale the $AX = 0$

10. Calcolare, se esiste, l'inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcolare inoltre $(A^T)^{-1}$ cioè la matrice inversa della trasposta. e confrontarla con A^{-1}