

ESERCIZI DI ANALISI, 20 OTTOBRE 2004

Risolvete i seguenti esercizi. Gli esercizi indicati con l'asterisco (*) sono più impegnativi. Gli esercizi contrassegnati con la croce (†) invece saranno svolti a lezione.

Esercizio 1. Ricordando che $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0; \\ -x & x < 0, \end{cases}$ risolvere i seguenti esercizi

1. Dimostrare che $|x| = \max\{x, -x\}$
2. Dati $x, y \in \mathbb{R}$ provare che $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$
3. Dati $x, y \in \mathbb{R}$ provare che $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$
4. Provare che $(x + y)^2 \geq (|x| + |y|)^2$. Usarlo per dimostrare che $|x + y| \geq |x| + |y|$
5. Sia $P(x) = x^{14} + 100x^2 - 8$. Se x_0 è una radice di P (ovvero $P(x_0) = 0$), provare che vale $|x_0| < 200$ (* †)
6. Sia $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$. Provare che se x_0 è una radice di P , allora vale $|x_0| \leq \max\{|a_0|, \dots, |a_{n-1}|\}$ (** †)
7. Verificare che il risultato dell'esercizio precedente vale anche per $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ polinomio a coefficienti complessi. (**)

Esercizio 2. Verificare, usando la definizione di limite, che

1. Non esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ (†)
2. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$ (†)

Esercizio 3. Definiamo la funzione di Dirac come $\delta(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}; \\ 0 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Provare, come nell'esercizio precedente, che

1. Non esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \delta(x)$ (* †)
2. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \delta(x) = 0$ (* †)

Esercizio 4. Siano $a, b \in \mathbb{R}^+$ due numeri positivi tali $a \cdot b = k$, k costante assegnata. Provare che

1. Il minimo di $a + b$ si ha quando $a = b$
2. $\sup(a + b) = +\infty$ (†)

Esercizio 5. Si consideri la funzione $f(x) = 2^{-\frac{1}{x}}$. Verificare che

1. La funzione è crescente
2. Le funzione è limitata inferiormente.
3. $\inf\{2^{-\frac{1}{x}}\} = 0$

Esercizio 6. Ricordando i limiti notevoli contenenti le funzioni trigonometriche, si verifichi che

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x) - \cos(a)}{x} = -\sin(a)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ (†)
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x^2} = 1$

Esercizio 7. Sapendo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$, dimostrare che

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ per $n \in \mathbb{N}$ (†)
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0$ (†)
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x^n} = 0$ per $n \in \mathbb{N}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log(x) = 0$ (* †)

Esercizio 8. Sapendo che $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log(x) = 0$ e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x^n} = 0$ calcolare

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log(x)$ per $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ (** †)
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \log(x)}{x^2+1}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log(x)}{x^2+1}$

Esercizio 9. Trovare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax + b \right) = -2 \text{ (†)}$$

Esercizio 10. Calcolare i seguenti limiti

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} - x\sqrt{x})$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - x\sqrt{x})$ (* †)

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x)$ (*)

(Sugg: si sostituisca $t = -x$ e si ragioni come per l'esercizio precedente)

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \right)$ (* †)

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5} \right)^{8x^2+3}$ [Sol: e^{-8}] (†)

5. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{1-\sin(x)}{x-\pi/2} \right)$ [Sol: 0] e $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{1-\sin(x)}{(x-\pi/2)^2} \right)$ [Sol: 1/2] (†)

6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5^x - 2^x}{5^x} \right)$ (†)

7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\log(x)}$ (* †)

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + 4x}{x^5 - x} \right)$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + 4x}{x^5 - x} \right)$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 + x^2 \cdot \sin(x) + \sin^2(x)}{x^4 + x^3 + x \cdot \sin(x)} \right)$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + x^2 \cdot \sin(x) + \sin^2(x)}{x^4 + x^3 + x \cdot \sin(x)} \right)$ (* †)

10. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) \operatorname{sgn}(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) \operatorname{sgn}(x)$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} x - |x|$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - |x|$

12. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}}$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}}$ (†)

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi+4x)}{x}$ e $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + \cos^2 x)^{\tan^2 x}$

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan(x)} - \sqrt{1-\tan(x)}}{\sin(x)}$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x \tan(x)} - \frac{1}{x \sin(x)} \right]$ (*)

15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{\sin(x)}} - 1}{\sqrt{x}}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(e^x + 1)}{x + \sin(x)}$ (**)