Numeri Complessi

1. Sia $z = 1 - 3i$: scriverlo in forma trigonometrica
2. Sia $z = 2 - 3i$. Calcolare z^{-2}
3. Risolvere $z^2 - 6iz - 1 = 0$
4. Calcolare $\sqrt[4]{2 - 2i}$
5. Risolvere $z^3 - 2z^2 - 2z - 1 = 0$
6. Risolvere $|z + 1| \leq |z|$
7. Determinare (disegnare) l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\mathrm{Re}(z) \geq \mathrm{Im}(z)$
8. Determinare (disegnare) l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z + 2i| < 3$

Estremo superiore, inferiore...

Calcolare le seguenti quantità (verificare che valgono le due proprietà che definiscono estremo inferiore e superiore)

1. $\sup\{x : \ \log_3(x) \leq 4\}$
2. $\sup\left\{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}\right\}$
3. $\inf\left\{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}\right\}$
4. $\inf\left\{1 - \frac{n-3}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$
5. $\inf\left\{1 - \frac{n+4}{n},\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\right\}$
6. $\inf\{y \in \mathbb{R} : \ y = x^2 - \sqrt{8}x + 2,\ x \in \mathbb{Q}\}$
7. $\inf\{n^2 - 6n + 1,\ n \in \mathbb{N}\}$
8. Mostrare usando il principio di induzione che

$$\forall\, q \neq 1 \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Limiti

Studiare i seguenti limiti

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(\cos^2(x))}{(3x)^2}$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$
3. $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{\tan(x/2)}}{x-2}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+x\cos(1/x)-1}{2x^2+x(1-\cos(1/x))}$
5. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{x^2}-\cos(x)}{\pi \sin^2 x}$
6. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sin(x)}{x}$

7. $\lim_{x\to 2} \begin{cases} x+1 & \text{se } x>2 \\ 4 & \text{se } x=2 \\ \dfrac{\sin(3(x-2))}{x-2} & \text{se } x<2 \end{cases}$

8. Sia $f(3,+\infty)\to\mathbb{R}$ una funzione monotona decrescente, tale che $f(x)>2$ per tutti gli $x\in]3,\infty[$. Dimostrare che esiste $L\in\mathbb{R}$ tale che
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$$
Discutere che valori può assumere L.

9. Siano $f(x)=2+\cos(x)$ e $g(x)=\sin(x)/x$ definite per $x\neq 0$. Calcolare
$$\lim_{x\to 0}\min\{f,g\}$$

Spazi vettoriali

Notazione: Sia V uno spazio vettoriale e $v_i\in V$ $i=1,\ldots,k$. Con
$$\text{Span} < v_1,\ldots,v_k\}$$
si indica lo "spazio generato" dai vettori $v_1,\ldots,v_k$ cioè l'insieme di tutte le combinazioni lineari
$$\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_k v_k, \qquad \alpha_i\in\mathbb{R}i=1,\ldots,k.$$

1. Determinare se i seguenti vettori sono linearmente indipendenti
$$v_1=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\qquad v_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\qquad v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}$$
I vettori $\{v_1,v_2,v_3\}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$?

2. I vettori
$$v_1=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\qquad v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$$
sono una base di $\mathbb{R}^3$?

3. I vettori
$$v_1=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\qquad v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$$
sono linearmente indipendenti?

4. Siano dati
$$v_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\qquad v_2=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$
è vero che Span $< v_1,v_2 >=\mathbb{R}^2$

5. "Completare" i seguenti vettori ad una base
$$v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad v_2=\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad v_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

6. Dire se i seguenti vettori sono linearmente dipendenti

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

7. Risolvere tramite l'eliminazione di Gauss il sistema

$$\begin{pmatrix} -7x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 7x_4 & = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 6x_4 & = 8 \\ -3x_1 - 6x_2 + x_3 - 6x_4 & = 2 \\ 2x_1 - 5x_2 - 7x_3 & = -8 \end{pmatrix}$$

8. Risolvere tramite l'eliminazione di Gauss il sistema

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_2 & = -1 \\ x_2 - x_3 & = -1 \\ x_3 - x_4 & = -1 \\ -x_4 & = -1 \end{pmatrix}$$