

ESERCIZI DI ANALISI, 12 OTTOBRE 2004

Risolvete i seguenti esercizi. Gli esercizi indicati con l'asterisco (*) sono più impegnativi. Gli esercizi contrassegnati con la croce (†) invece saranno svolti a lezione.

Esercizio 1. Discutere la monotonia delle seguenti funzioni reali

1. $f(x) = x^2 - 4$ per $x \in \mathbb{R}^+$ (†)
2. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ per $x \geq 1$ (* †)
3. $f(x) = 3x + 5$
4. $f(x) = e^x$ (†)
5. $f(x) = -\log(x)$

Esercizio 2. Provare le seguenti proposizioni

1. $f(x) = \sqrt{x}$ è crescente in \mathbb{R}^+ (†)
2. Se f e g sono due funzioni crescenti da \mathbb{R} in \mathbb{R} , anche la composizione $f \circ g$ è crescente (†)
3. Se f e g sono due funzioni decrescenti da \mathbb{R} in \mathbb{R} , la composizione $f \circ g$ è crescente (†)
4. Se f e g sono due funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} , una crescente ed una decrescente, la composizione $f \circ g$ è decrescente

Esercizio 3. Usando, se necessario, i risultati del precedente esercizio, rispondere alle seguenti domande

1. $f(x) = \frac{1}{\log(x)}$ è monotona per $x > 1$? Se sì, è crescente o decrescente? E nel suo dominio? (†)
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ è crescente per $x > 0$?
3. $f(x) = \arcsin(\sin(x))$ è monotona su \mathbb{R} ? E su $[-\pi, \pi]$? (* †)

Esercizio 4. Calcolare estremo superiore ed inferiore dei seguenti insiemi

1. $\{x = n^2 - 5n + 3 : n \in \mathbb{N}\}$ (†)

2. $\{x = n^2 + 3n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$

3. $\{x = \sin n\frac{\pi}{8} : n \in \mathbb{N}\}$ (†)

4. $\{x = \frac{t+1}{t-2} : t \in \mathbb{R} t > 2\}$ (* †)

(Sugg: mostrare che la successione è decrescente)

5. $\mathbb{N} \cup \{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

6. $\{x \in [\frac{1}{3}; \frac{1}{2}] : x = \frac{2m+1}{2n}, m, n \in \mathbb{N}, n > 0\}$ (**)

Esercizio 5. Dimostrare per induzione le seguenti proprietà

1. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

2. $n^2 > 2n$ per $n > 2$ (†)

3. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ (†)

4. $2^n > 10n$ per $n \geq 6$ (*)

5. n^2 è divisibile per 4 se n è pari (†)

Esercizio 6. Scrivere in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi

1. $z = i(1 + i)$ (†)

2. $z = \frac{1+i}{1-i}$ (†)

3. $z = 1 + i$

Esercizio 7. Calcolare il modulo del seguente numero complesso

1. $z = 1 + i - \frac{1}{1-2i}$ (†)

Esercizio 8. Risolvere le seguenti equazioni in \mathbb{C}

1. $(z + i)^2 = (\sqrt{3} + i)^3$

2. $z^3 = |z|^2$ (†)

3. $\bar{z}^2 + |z|^2 - 1 = z$

4. $z^2 + 2z + 1 = 0$ (†)

5. $z^4 + 2z^2 + 1 = 0$ (†)

6. $z^6 + 2z^2 + 1 = 0$ (*)

Esercizio 9. Utilizzare la definizione di numero complesso coniugato per provare le seguenti proprietà

1. $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ (†)

2. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ (†)

3. Se un polinomio ha coefficienti reali, allora le sue radici sono numeri reali, o complessi a due a due coniugati (** †)

Esercizio 10. Sapendo che il polinomio $z^4 - 5z^3 + 10z^2 - 10z + 4$ ha come radice $i + 1$, si trovino le altre sue radici. (**)
(Sugg: si usi il punto 3 dell'esercizio precedente)