CORSO: **Teoria delle Correnti / Theory of Currents**
NUMERO DI ORE: **44**
DOCENTE: **Giovanni Alberti**
ANNO ACCADEMICO: **2023-24**
CORSO DI STUDIO: **Dottorato in Matematica**

Obiettivi formativi. La teoria delle correnti intere, nella forma messa a punto da Federer e Fleming, costituisce una parte fondamentale della Teoria Geometrica della Misura e in tempi più o meno recenti ha trovato applicazioni in diverse aree dell'analisi matematica (oltre che al problema di Plateau, che costituisce la motivazione iniziale dietro allo sviluppo di questa teoria). Lo scopo di questo corso è illustrare le basi della teoria delle correnti (intere e non) e anche alcuni aspetti più avanzati, arrivando alla dimostrazione del teorema di compattezza di Federer e Fleming.

Programma del corso [versione: 7 aprile 2024].

Le parti non fondamentali sono riportati in corsivo.

1. NOZIONI DI BASE
   - Misure scalari e vettoriali, Teorema di Riesz, convergenza debole di misure, misure di Hausdorff, dimensione di Hausdorff.
   - Funzioni e mappe Lipschitiziane, teorema di Rademacher, formula dell'area (senza dimostrazione), insiemi rettificabili, spazio tangente (approssimato) di un insieme rettificabile, caratterizzazione dello spazio tangente in termini di blow-up.
   - *Criteri di rettificabilità (solo accennati): esistenza del cono tangente approssimato, esistenza della densità (teorema di i Marstrand + Mattila + Preiss); caratterizzazione degli insiemi pureamente non rettificabili per proiezione (teorema di Besicovitch + Federer).*
   - Algebra multilineare: k-covettori su uno spazio vettoriale V (definiti come applicazioni k-lineari alternanti su V), prodotto esterno, base dello spazio dei k-covettori indotta da una base di V, dimostrazione della formula di Binet generalizzata, k-vettori su V (definiti in astratto come k-covettori sul duale di V), k-vettori semplici, interpretazione geometrica dei k-vettori semplici e unitari come k-piani orientati. Massa dei k-vettori e co-massa dei k-covettori.
   - k-forme: definizione, differenziale esterno, pull-back. Orientazione di una superficie regolare (intesa come campo di k-vettori tangente), orientazione del bordo. Teorema di Stokes (senza dimostrazione).

2. CORRENTI: NOZIONI FONDAMENTALI
   - Definizione delle k-correnti (come duale delle k-forme di classe C^∞ con supporto compatto), convergenza nel senso delle correnti, bordo, massa, semicontinuità della massa. Le superfici ortientate come esempi di correnti, significato geometrico di bordo e massa in questo contesto.
   - Classi significative di correnti: correnti di massa finita, correnti normali, rettificabili, intere, poliedrali. Compattezza delle correnti normali. Enunciati dei teoremi fondamentali sulle correnti intere: teorema di rettificabilità del bordo; teorema di compattezza (o di chiusura) di Federer e Fleming; densità delle correnti poliedrali (le dimostrazioni sono rimandata alla parte finale del corso). Necessità delle ipotesi nel teorema di Federer e Fleming.
   - Push-forward di correnti: definizione (come aggiunto del pull-back per le forme); formula del push-frward per correnti rettificabili; bordo del push-forward.
   - Prodotto di correnti e formula per il bordo del prodotto. Constancy lemma. Rappresentazione delle k-correnti normali supportate su una superfice k-dimensionale come funzioni BV. Struttura della misura associata ad una k-corrente normale. Formula di omotopia e costruzione del cono su una corrente senza bordo. *Derivazione dei risultati fondamentali della teoria del grado per mappe tra varietà orientate (con e senza bordo).*
   - Norma flat di una k-corrente T (definita in termini delle decomposizioni $T = R + \partial S$); esempi di uso, caratterizzazione in termini dell'azione su forme. Nozione alternativa di norma flat per k-correnti senza bordo su R^n, legame con la norma flat usuale.
   - Teorema di deformazione poliedrale. Applicazioni del teorema di deformazione poliedrale: approssimazione in norma flat con correnti poliedrali; teorema isoperimetrico per correnti intere;

compattezza della norma flat su una classe di correnti con masse e masse dei bordi equilimitate, e con supporti equilimitati. *Classi di omologia di una varietà definite tramite correnti intere o normali; coincidenza di queste nozioni con quelle usuali (senza dimostrazione). Approssimazione in massa con correnti poliedrali (senza dimostrazione).*

3. Slicing e dimostrazione dei teoremi fondamentali
   - Formula di coarea per una mappa di classe C^1 (o Lipschitz) da $\mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^h$ (senza dimostrazione). Formula di coarea per una mappa da un'insieme k-rettificabile in $\mathbb{R}^h$. Slicing di di una corrente rettificabili rispetto ad una mappa a valori in $\mathbb{R}^h$. Definizione di slicing di una corrente astratta. Esistenza e construzione iterativa dello slicing di una corrente normale.
   - Mappe di classe BV da $\mathbb{R}^h$ in uno spazio di Banach (definite in termini di stima della norma L^1 della differenza della mappa e di una sua traslata). Le slice di una corrente normale dipendono in modo BV dal parametro (teorema di Jerrard). Caratterizzazione delle correnti intere per slicing (teorema di White / Ambrosio + Kirchheim, con presentazione del passo fondamentale della dimostrazione, e cenno a quelli rimanenti). Dimostrazione del teorema di rettificabilità del bordo e del teorema di compattezza di Federer e Fleming.

Prerequisiti. È richiesta una solida conoscenza delle nozioni di base di teoria della misura e dell'integrazione astratta, e degli aspetti dell'analisi funzionale a queste collegati (topologie deboli, Teorema di Riesz). Una conoscenza delle basi della teoria geometrica della misura (misure di Hausdorff, formula dell'area, insiemi rettificabili) è auspicabile ma non strettamente necessaria.

Testi di riferimento. Il corso non segue un libro di testo specifico. Gli argomenti fondamentali sono coperti dai seguenti testi di base:

- S.G. Krantz, H.R. Parks: *Geometric Integration Theory.* Birkhäuser, Boston, 2008.
- F. Morgan: *Geometric Measure Theory: a beginner's guide.* Academic Press, San Diego, 2008.
- L. Simon: *Lectures on Geometric Measure Theory.* Proccedings of the Centre for Mathematical Analysis, vol. 3. Australian National University, Canberra, 1983.

Il testo di riferimento per la teoria geometrica della misura e la teoria delle correnti è:

- H. Federer: *Geometric Measure Theory.* Die Grundlehren der mathmatischen Wissenschaften, vol. 153. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1969. (Ristampato nella serie Classics in Mathematics, Springer-Verlag, 1996.)

Comunicazioni e streaming delle lezioni. Le lezioni del corso vengono trasmesse in streaming per permettere anche a studenti esterni all'università di Pisa di seguire il corso. Per lo streaming delle lezioni e per tutte le comunicazioni viene utilizzata la piattaforma MS Teams dell'Università di Pisa (link al team). Sul team del corso sono conservate anche le registrazioni delle lezioni.

Modalità d'esame. L'esame consiste di due parti: un seminario su un tema scelto da una lista proposta dal docente (o comunque su un tema concordato con il docente), seguito da un esame orale sugli argomenti fondamentali del corso. La data dell'esame viene concordata individualmente con ogni studente.
Chi intende fare l'esame è pregato di contattarmi per email, indicando che seminario vuole fare e una data approssimativa dell'esame, entro due mesi da quel momento. (Conto di assegnare ogni seminario una volta sola, al primo che lo chiede; per questa ragione non voglio assegnarlo a chi intende fare l'esame dopo molto tempo o in data indefinita.)