AM3 20/21 Lezione 33

9/12/2020

Integrazione su superfici

- Superfici k-dimensionali in $\mathbb{R}^d$
- integrale (e misura) su superfici
- k-forme, integrazione di k-forme su sup., Teorema di Stokes.

Definizione

Data $f : \Omega \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^d$ di classe C^1, e
aperto
dato $x \in \Omega$, il differenziale di f in x è l'applicazione lineare $d_x f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ associata alla matrice $\nabla f(x)$.

Lo sviluppo di Taylor di f in x al primo ordine è

$$f(x+h) = f(x) + d_x f \cdot h + o(h)$$

Definizione

Siano $1 \leq k \leq d$ e $m = 1, 2, \dots, \infty$.
$\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ è una superfice (senza bordo) di dim. K e classe C^m se $\forall x \in \Sigma$ esistono

- U intorno (sempre aperto) di x in $\mathbb{R}^d$

- $\phi : D$ aperto in $\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^d$ di classe C^m t.c.
    - $\phi(D) = \Sigma \cap U$ (ϕ parametrizza $\Sigma \cap U$)
    - $\phi : D \to \Sigma \cap U$ è un omeomorfismo,
    - $\nabla\phi(s)$ (o equiv. $d_s\phi$) ha rango massimo (cioè k) in ogni $s \in D$.

Cioè ϕ è una parametrizzazione $\boxed{\text{regolare}}$ di classe C^m di $\Sigma \cap U$.

In altre parole Σ è una superficie se ammette localmente una parametrizzazione regolare.

Osserv.

- Se Σ è una sup., $\Sigma \cap A$ è una sup. $\forall A$ aperto.
- Se $k = d$, Σ è una superficie se e solo se è un aperto di $\mathbb{R}^d$.
- La definizione sopra corrisponde a quella di sottovarietà "embedded" di $\mathbb{R}^d$.

Prop.

Dati k, d, m come sopra, $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$, $x \in \Sigma$, sono fatti equivalenti:

- $\exists\, U$ int. di x e $\phi : D \to \Sigma \cup U$ param. reg. di classe C^m.

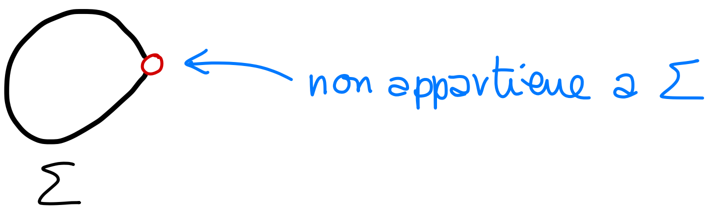
  aperto di $\mathbb{R}^d$

- $\exists\, U$ int. di x e $g: U \to \mathbb{R}^{d-k}$ di classe C^m t.c. $\nabla g(x)$ ha rango max. (cioè $d-k$) in ogni $x \in U$ e $\Sigma \cap U = g^{-1}(0)$ (cioè $\Sigma \cap U$ è definito dall'equazione $g(x)=0$).

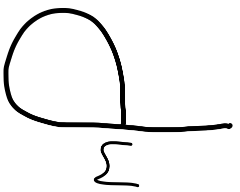
- $\exists\, U$ int. di x e $h: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{d-k}$ di classe C^m t.c. $\Sigma \cap U = \Gamma_h \cap U$ dove Γ_h è il grafico di h (avendo identificato $\mathbb{R}^d$ con $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}$ opportunamente).

Esempi

- S^{d-1} è una superfice di classe C^∞ definita dall'equazione $|x|^2=1$ (cioè $S^{d-1} = g^{-1}(0)$ con $g(x) := |x| -$

- 

Σ è una curva.



Σ non è una curva anche se ammette una parametrizzazione bigettiva $\gamma: [0,1) \to \Sigma$ di classe C^∞ con $\dot\gamma \neq 0$.
Perché γ non è un omeomorfismo.

- Il disco $D := \{(x,y,0) : x^2+y^2<1\}$ è una superficie in $\mathbb{R}^3$, ma $\overline{D} = \{(x,y,0) : x^2+y^2 \leq 1\}$ non lo è.

  $\overline{D}$ è un esempio di superficie con bordo.

Definizione

Data Σ superficie come sopra, $\phi : D \to \Sigma \cap U$ parametrizzazione regolare, $\forall x \in \Sigma \cap U$ lo **spazio tangente** a Σ in x è

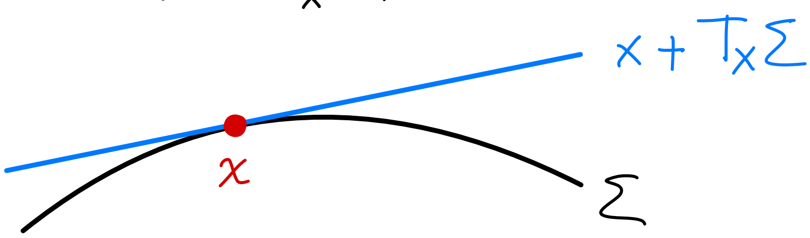
$$T_x\Sigma = \mathrm{Tan}(\Sigma, x) := \mathrm{Im}(d_s\phi) \quad \text{con } s := \phi^{-1}(x).$$

Osserv:

- se $g : U \to \mathbb{R}^{d-k}$ definisce un'equazione per Σ allora $T_x\Sigma = \ker(d_x g)$;

- $T_x\Sigma = \left\{ \dot{\gamma}(0) : \begin{array}{l} \gamma : [0,\delta) \to \Sigma \text{ cammino di} \\ \text{classe } C^1 \text{ t.c. } \gamma(0) = x \end{array} \right\}$

- Nei disegni si disegna il sottospazio affine $x + T_x\Sigma$ e non $T_x\Sigma$.



Definizione

Data Σ come sopra, $f : \Sigma \to \mathbb{R}^{d'}$ è una mappa di classe $C^{m'}$ con $m' = 1, \dots, m$ se $f \circ \phi$ è di classe $C^{m'}$ $\forall\, \phi : D \to \Sigma \cap U$ param. regolare.

Osserv.

- f è di classe $C^{m'}$ se e solo se ammette un'estensione $F : A \to \mathbb{R}^{d'}$ di classe $C^{m'}$ per un qualche aperto A che contiene Σ.

- se $\phi : D \to \Sigma \cap U$ è una param. regolare allora l'inversa $\phi^{-1} : \Sigma \cap U \to \mathbb{R}^k$ è di classe C^m.

Definizione

Date Σ, f come sopra, $x \in \Sigma$, il differenz. di f in x è la mappa lineare $d_x f : T_x\Sigma \to \mathbb{R}^{d'}$ data da

$$d_x f : v \in T_x\Sigma \longmapsto (f \circ \gamma)'(0) \in \mathbb{R}^{d'}$$

$$v = \gamma'(0) \quad \text{con } \gamma : [0, \delta) \to \Sigma$$

cammino C^1 t.c. $\gamma(0) = x$

Osserv.

- La definizione è ben posta (non dipende dalla scelta di γ).

- Se $F : A \to \mathbb{R}^{d'}$ è un'estensione di f allora $d_x f$ = restrizione di $d_x F$ a $T_x \Sigma$.
  (Attenzione $d_x F$ dipende dalla scelta di F — la restrizione di $d_x F$ a $T_x \Sigma$ no!)

- Data $f : \Sigma \to \Sigma'$ con Σ' superficie in $\mathbb{R}^{d'}$ allora $\mathrm{Im}(d_x f) \subset T_{f(x)} \Sigma'$ e quindi $d_x f$ può essere vista come mappa di $T_x \Sigma$ a $T_{f(x)} \Sigma'$.

Passo ora alla definizione di misura (di Lebesgue) su spazi k-dimensionali e poi su superfici k-dim.

Definizione

Dato V spazio vettoriale di dim. k con prodotto scalare (definito positivo) (caso particolare: V sottospazio di $\mathbb{R}^d$), la misura (di Lebesgue) su V, σ_k, è quella data dall'identificazione di V con $\mathbb{R}^d$ tramite la scelta di una base ortonormale $e_1, \dots, e_k$.

Cioè posto $\phi : \mathbb{R}^k \to V$, $\phi : x \mapsto \sum_i x_i e_i$, pongo $\sigma_k(E) = |\phi^{-1}(E)|$ per ogni E misurabile, cioè t.c. $\phi^{-1}(E) \in \mathcal{M}^k$.

Osserv.

La definizione di σ_k non dipende dalla scelta della base.

Data un'altra base $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k$ e $\tilde{\phi}$, ho che $\tilde{\phi}^{-1}(E) = \tilde{\phi}^{-1}\phi(\phi^{-1}(E))$ e $f := \tilde{\phi}^{-1}\phi$ è l'applic. lineare da $\mathbb{R}^k$ in sé associata alla matrice di cambio di base M

e $M \in O(k)$ quindi $|\det \nabla f(x)| = |\det M| = 1$,
quindi

$$|\Phi^{-1}(E)| = |f(\Phi^{-1}(E))| \underset{\uparrow}{=} |\Phi^{-1}(E)|$$

teorema di cambio di variabile negli integrali

Definizione

Dati V, V' spazi vettoriali con prodotto scalare di dimensione k, $\Lambda : V \to V'$ lineare, definisco

$$|\det \Lambda| := |\det M|$$

dove M è la matrice associata a Λ dalla scelta di due basi ortonormali di V e V'.

Allora $\forall E \subset V$ misurabile

$$\sigma_k(\Lambda(E)) = |\det \Lambda| \cdot \sigma_k(E)$$

(Segue dalla definizione della misura su V e su V')

Osserv.

$|\det \Lambda|$ non dipende dalla scelta delle basi su V e V'.

Non posso definire $\det \Lambda$ come $\det M$, perché il segno di $\det M$ dipende dalla scelta delle basi su V e V'.

Definizione

Dati V, W spazi con prodotto scalare non necessariamente della stessa dim., e $\Lambda : V \to W$ lineare pongo $V' := \Lambda(V)$ e

$$|\det \Lambda| := \begin{cases} 0 & \text{se } \underset{\overset{\|}{rk(\Lambda)}}{\dim}(V') < k, \\ \text{come sopra} & \text{se } \dim(V') = k. \end{cases}$$

(cioè $\dim(\ker \Lambda) = 0$)

In particolare $|\det \Lambda| = 0 \iff rk(\Lambda) < k$.

Prop. 1

Sia $\Lambda : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ lineare e sia N la matrice $d \times k$ associata a Λ (tramite le basi canoniche di $\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^d$)

Allora

$$|\det \Lambda|^2 = \det(N^t N) \qquad (1)$$

$$= \sum_{\substack{Q \text{ minore} \\ k\times k \text{ di } N}} (\det(Q))^2 \qquad (2)$$

Il vantaggio di queste formule per il calcolo di $|\det \Lambda|$ è che non richiedono di trovare una base ortonormale di $\mathrm{Im}(\Lambda)$.

Dim.

(1) Assumo che $rk(\Lambda) = k$ (lascio a voi il caso $rk(\Lambda) < k$).

Prendo $e_1, \dots, e_k \in \mathbb{R}^d$ base ortonormale di $\mathrm{Im}(\Lambda)$, M matrice $k \times k$ associata a Λ da questa scelta di base per $\mathrm{Im}(\Lambda)$ e dalla base canonica per $\mathbb{R}^k$.

Indico con B la matrice $d \times k$ con colonne $e_1, \dots, e_k$.

Allora

$$N = BM$$

e quindi

$$\det(N^t N) = \det(M^t \underbrace{B^t B}_{\substack{\| \\ I}} M) = \det(M^t M) = (\det M)^2$$

perché le colonne di B sono vettori ortonormali

$$= |\det \Lambda|^2$$

(2) Segue dalla formula di Binet generalizzata che vediamo dopo. $\square$

Osserv.

Se $\phi : D \longrightarrow V$ è una param. reg. di $V \cap U$

apertо di $\mathbb{R}^k$

sottospazio k-dim. di $\mathbb{R}^d$

allora

$$\sigma_k(E) = \int_{\phi^{-1}(E)} |\det d_s\phi| \, ds \qquad \forall E \subset V \cap U$$

misurabile

Questa formula è semplicemente la formula di cambio di variabile negli integrali.

Def. Data Σ sup. k-dim. di classe C^1 in $\mathbb{R}^d$, dico che $E \subset \Sigma$ è k-misurabile se $\phi^{-1}(E)$ è misurabile (secondo Lebesgue) per ogni $\phi : D \to \Sigma \cap U$ param. regolare.

Prop. 2

Data Σ come sopra, esiste un'unica misura σ_k (definita sui sottoinsiemi k-misur. di Σ) tale che per ogni $\phi : D \to \Sigma \cap U$ param. reg. vale

$$(3) \qquad \sigma_k(E) = \int_{\phi^{-1}(E)} \underbrace{|\det d_s\phi|}_{= J\phi(s)} \, ds \qquad \forall E \subset \Sigma \cap U \text{ k-misurabile}$$

Commenti

- σ_k è la misura di volume k-dim. su Σ.
- $J\phi(s) := |\det d_s\phi|$ è il determinante Jacobiano di ϕ in s e soddisfa (Prop. 1)

$$J\phi(s) := |\det d_s\phi| = \sqrt{\det(\nabla^t\phi(s) \cdot \nabla\phi(s))}$$

$$= \sqrt{\sum_{\substack{Q \text{ minore} \\ k\times k \text{ di } \nabla\phi(s)}} (\det(Q))^2}$$

- La misura σ_k ha una definizione intrinseca (che non dipende dalla parametrizzazioni) come misura di Hausdorff k-dimensionale. (Questo non lo faccio vedere.)

Dim. (traccia)

Passo 1 : costruzione di σ.

Prendete $\phi_i : D_i \to \Sigma \cap U_i$ famiglia num. di param. t.c. $\bigcup_i U_i \supset \Sigma$; prendete (Σ_i) partizione di Σ t.c. $\Sigma_i \subset \Sigma \cap U_i$, e ponete

$$\sigma_k(E) = \sum_i \int_{\phi_i^{-1}(E \cap \Sigma_i)} J\phi_i(s)\, ds \qquad \forall E \subset \Sigma \text{ misurabile}$$

Passo 2 : dimostrazione di (3).

Il punto chiave è far vedere che date $\phi : D \to \Sigma \cap U$ e $\tilde{\phi} : \tilde{D} \to \Sigma \cap \tilde{U}$ param. reg. e dato $E \subset \Sigma \cap U \cap \tilde{U}$ misurabile, allora

$$(4) \qquad \int_{F := \phi^{-1}(E)} J\phi(s)\, ds = \int_{\tilde{F} := \tilde{\phi}^{-1}(E)} J\tilde{\phi}(\tilde{s})\, d\tilde{s}$$

Per dimostrare (4) parto da $\int_{F} J\phi(s)\,ds$ e applico il cambio di variabile $s = g(\tilde{s})$ con $g : \tilde{D} \to D$ data da $g = \phi^{-1} \circ \tilde{\phi}$ ed applico la formula di cambio di variabile per gli integrali vista in Analisi 2. □

Cor. 3

Data $\phi : D \to \Sigma \cap U$ parametrizzazione di Σ e $f : \Sigma \cap U \to [-\infty, +\infty]$ integrabile rispetto a σ_k allora

$$(5) \qquad \int_{\Sigma \cap U} f(x)\, d\sigma_k(x) = \int_{D} f(\phi(s))\, J\phi(s)\, ds$$

Dim.

(5) vale se f è semplice (per la formula (3) nella Prop. 2) e poi si estende per appross. a tutte le f positive, etc. □

Per calcolare $\int_{\Sigma} f\, d\sigma_k$ e $\sigma_k(E)$ conviene usare mappe ϕ che non sono esattam. parametrizzazioni.

Vale in effetti il seguente risultato:

Prop. 4 (Formula dell'area)

Date Σ', Σ sup. k-dimensionali, D aperto in Σ', $\phi : D \to \Sigma$ di classe C^1, allora

$$\underbrace{\int_E \# \phi^{-1}(x)\, d\sigma_k(x)}_{\text{misura di } E \text{ con molteplicità}} = \int_{\phi^{-1}(E)} J\phi(s)\, d\sigma_k(s) \qquad \forall E \subset \Sigma \text{ misurabile}$$

e

$$\int_\Sigma f(x) \cdot \# \phi^{-1}(x)\, d\sigma_k(x) = \int_D f(\phi(s))\, J\phi(s)\, d\sigma_k(s) \qquad \forall f : \Sigma \to [-\infty, +\infty] \text{ integrabile}$$

Osserv.

In particolare, detto $N := \{x : \# \phi^{-1}(x) > 1\}$, se $\phi^{-1}(N)$ ha misura nulla allora

$$\sigma_k(E) = \int_{\phi^{-1}(E)} J\phi(s)\, d\sigma_k(s) \quad \forall E \subset \phi(D)$$

e

$$\int_{\phi(D)} f\, d\sigma_{k-1} = \int_D f(\phi(s))\, J\phi(s)\, d\sigma_k(s) \qquad \forall f \ldots$$

In poche parole, non è necessario usare param. per calcolare $\sigma_k(E)$ e $\int f\, d\sigma_k$.

Ometto la dimostrazione della Prop. 4.

Esempi

1| Parametrizzazione di $\mathbb{S}^d$ tramite coordinate sferiche.

Sia $\phi_d : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ data da

$$\phi_d(\alpha_1, \dots, \alpha_d) = \big(\cos\alpha_1;\ \operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_2;\ \operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2\cos\alpha_3, \dots$$
$$\dots; \operatorname{sen}\alpha_1\cdots\operatorname{sen}\alpha_{d-1}\cos\alpha_d;\ \operatorname{sen}\alpha_1\cdots\operatorname{sen}\alpha_d\big)$$

Definizione ricorsiva:

- $\phi_1(\alpha_1) = (\cos\alpha_1, \operatorname{sen}\alpha_1)$
- $\phi_d(\alpha_1, \dots, \alpha_d) = (\cos\alpha_1, \operatorname{sen}\alpha_1 \cdot \phi_{d-1}(\alpha_2, \dots, \alpha_d))$

Si dimostra che:

- $\phi_d([0,\pi]^{d-1} \times [0,2\pi]) = \mathbb{S}^d$;
- ϕ_d è iniettiva su $(0,\pi)^{d-1} \times (0,2\pi)$;
- $J\phi_d(\alpha) = (\operatorname{sen}\alpha_1)^{d-1}(\operatorname{sen}\alpha_2)^{d-2} \cdots (\operatorname{sen}\alpha_{d-1})^1$,
  in particolare $d_\alpha\phi_d$ ha rango massimo per ogni $\alpha \in (0,\pi)^{d-1} \times [0,2\pi]$.

ϕ può essere usata per il calcolo degli integr. su $\mathbb{S}^d$

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{cc} \quad\overset{1}{\longleftrightarrow} & \qquad\overset{d-1}{\longleftrightarrow} \end{array} & \\
\nabla\phi_d(\alpha) = \left(\begin{array}{c|c} -\operatorname{sen}\alpha_1 & 0 \\ \hline \cos\alpha_1\,\phi_{d-1}^t & \operatorname{sen}\alpha_1\,\nabla\phi_{d-1} \end{array}\right) & \begin{array}{c} \updownarrow 1 \\ \updownarrow d \end{array}
\end{array}$$

$$\nabla^t\phi_d \cdot \nabla\phi_d = \left(\begin{array}{c|c} -\operatorname{sen}\alpha_1 & \cos\alpha_1\,\phi_{d-1} \\ \hline 0 & \operatorname{sen}\alpha_1\,\nabla^t\phi_{d-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} -\operatorname{sen}\alpha_1 & 0 \\ \hline \cos\alpha_1\,\phi_{d-1}^t & \operatorname{sen}\alpha_1\,\nabla\phi_{d-1} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \operatorname{sen}^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_1\,\overbrace{|\phi_{d-1}|^2}^{1\,=} & \operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_1\,\overbrace{\phi_{d-1}\nabla\phi_{d-1}}^{0\,=} \\ \hline \operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_1\left(\phi_{d-1}\nabla\phi_{d-1}\right)^t & \operatorname{sen}^2\alpha_1\,\nabla^t\phi_{d-1}\nabla\phi_{d-1} \end{array}\right)$$

Osservo che $|\phi_{d-1}|=1$ perché ϕ_{d-1} ha valori in S^{d-1}, e derivando $|\phi_{d-1}|^2=1$ ottengo $2\phi_d\nabla\phi_{d-1}=0$.

$$= \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \operatorname{sen}^2\alpha_1\,\nabla^t\phi_{d-1}\nabla\phi_{d-1} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow 1 \\ \updownarrow d-1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \leftrightarrow & \longleftrightarrow \\ 1 & d-1 \end{array} & \end{array}$$

Quindi

$$\left(J\phi_d\right)^2 := \det\left(\nabla^t\phi_d\,\nabla\phi_d\right) = \left(\operatorname{sen}\alpha_1\right)^{2(d-1)}\left(J\phi_{d-1}\right)^2$$

e per induzione

$$J\phi_d = \left(\operatorname{sen}\alpha_1\right)^{d-1}\left(\operatorname{sen}\alpha_2\right)^{d-2}\cdots\left(\operatorname{sen}\alpha_{d-1}\right)^{1}.$$

2| Parametriz. di $\mathbb{R}^d$ con coordinate sferiche

$$x = \psi(\rho,\alpha) := \rho\, \phi_{\cancel{d-1}}(\alpha)$$

$$\rho \in [0,+\infty), \quad \alpha \in \underbrace{[0,\pi]^{d-2}\times[0,2\pi]}_{Q}$$

(ψ è iniettiva su $(0,+\infty)\times(0,\pi)^{d-2}\times(0,2\pi)$)

$$J\psi(\rho,\alpha) = \rho^{d-1}\, J\phi(\alpha) = \rho^{d-1}(\operatorname{sen}\alpha_1)^{d-2}\cdots(\operatorname{sen}\alpha_{d-2})^{1}$$

Infatti

vettore colonna

$$\nabla\psi = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} \phi^t & \rho\nabla\phi \end{array}\right) & d \\ \quad 1 \qquad\quad d-1 & \end{array}$$

Quindi

$$\nabla^t\psi\cdot\nabla\psi = \begin{pmatrix}\phi \\ \hline \rho\nabla^t\phi\end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|c}\phi^t & \rho\nabla\phi\end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \overset{1}{\overset{\shortparallel}{|\phi|^2}} & \rho\,\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\phi\nabla\phi}} \\ \hline 0 & \rho^2\,\nabla^t\phi\nabla\phi\end{array}\right)$$

Quindi

$$|J\psi|^2 = \det(\nabla^t\psi\,\nabla\psi) = \rho^{2(d-1)}\det(\nabla^t\phi\nabla\phi) = (\rho^{d-1}J\phi)^2.$$

3) Fissato $\rho > 0$, $\psi_\rho(\cdot) = \rho\,\phi(\cdot) = \psi(\rho, \cdot)$
parametrizza $\rho\,\mathbb{S}^{d-1} = \partial B(0,\rho)$ e

$$J\psi_\rho(\alpha) = \rho^{d-1} J\phi(\alpha) = J\psi(\rho,\alpha)$$

vale solo perché ϕ parametrizza la sfera

Ma allora

$$\int_{B(x,r)} f(x)\,dx = \int_0^r \int_Q f(\psi(\rho,\alpha))\, J\psi(\rho,\alpha)\, d\alpha\, d\rho$$

cambio var. $x = \psi(\rho,\alpha)$

$$= \int_0^r \left(\int_Q f(\psi_\rho(\alpha))\, J\psi_\rho(\alpha)\, d\alpha \right) d\rho$$

$$= \int_0^r \left(\int_{\partial B(0,r)} f(x)\, d\sigma_{d-1}(x) \right) d\rho$$

Dimostrazione alternativa: parametrizzo $\mathbb{R}^d$ con
$g : [0,+\infty) \times \mathbb{S}^{d-1} \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\quad g : (\rho, y) \longmapsto \rho y$

Facendo i conti si scopre che $Jg(\rho,y) = \rho^{d-1}$
e quindi

$$\int_{B(0,r)} f(x)\,dx = \int_0^r \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\rho y)\, \rho^{d-1} d\sigma_{d-1}(y) \right) d\rho$$

$$= \int_0^r \left(\int_{\partial B(0,\rho)} f(x)\, d\sigma_{d-1}(x) \right) d\rho .$$

AM3 20/21 Lezione 35

16/12/2020

K-covettori e k-forme

Nel seguito V è uno spazio vettoriale, $d := \dim(V)$.

Def

$\alpha : V^k \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice k-lineare alternante (cioè α è un k-covettore su V) se

(i) α è lineare in ogni variabile;

(ii) α è alternante,

cioè $\forall \sigma \in S_k = \{$ permutaz. di $\{1, \dots, k\}\}$ vale

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, \alpha(v_1, \dots, v_k)$$

Pongo

$$\Lambda^k(V) := \{ \alpha \text{ k-lin. alt. su } V^k \}$$

$$= \{ \text{k-covettori su } V \}$$

$$\Lambda^0(V) := \mathbb{R}$$

Osserv.

- $\Lambda^1(V) = V^* =$ duale di V.
- $(v_1, \dots, v_k) \longmapsto \det(\underbrace{v_1 | \dots | v_k}_{\text{matrice } k\times k \text{ con colonne } v_1,\dots,v_k})$
  è k-lineare alternante su $\mathbb{R}^k$
- (ii) $\Longleftrightarrow$ se scambio v_i con v_j (con $i \neq j$) il valore di α cambia segno.
- (ii) $\Longrightarrow$ se $v_i = v_j$ (con $i \neq j$) allora $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$,
- se $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente dipendenti allora $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$. (Verificatelo!)
- $\Lambda^k(V) = \{0\}$ se $k > d$.

Def. (Pull-back di un k-covettore)

Data $T : V' \longrightarrow V$ lineare e $\alpha \in \Lambda^k(V)$ il pull-back $T^\# \alpha \in \Lambda^k(V')$ è data da

$$T^\# \alpha(\underbrace{v_1, \dots, v_k}_{\in (V')^k}) = \alpha(Tv_1, \dots, Tv_k)$$

Def. (prodotto esterno)

Date $\alpha_1 \in \Lambda^{k_1}(V)$ e $\alpha_2 \in \Lambda^{k_2}(V)$, il prodotto (esterno) $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \in \Lambda^{k_1+k_2}(V)$ è definito da

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 (v_1, \dots, v_{k_1+k_2}) :=$$

$$\frac{1}{k_1! \, k_2!} \sum_{\sigma \in S_{k_1+k_2}} \mathrm{sgn}(\sigma) \, \alpha_1(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k_1)}) \, \alpha_2(v_{\sigma(k_1+1)}, \dots, v_{\sigma(k_1+k_2)})$$

Prop.

distrib.!

Il prodotto $\wedge$ è ben definito, associativo e anticommutativo, cioè

$$\alpha_2 \wedge \alpha_1 = (-1)^{k_1 k_2} \alpha_1 \wedge \alpha_2$$

(verificatelo; l'associatività dipende dalla scelta del fattore $\frac{1}{k_1! \, k_2!}$) Se $\alpha \in \Lambda^k(V)$ con k dispari $\alpha \wedge \alpha = 0$.

Basi di V, V^* e $\Lambda^k(V)$

Fisso $(e_1, \dots, e_d)$ base di V.

Indico con $(e_1^*, \dots, e_d^*)$ corrisp. base duale cioè la base di $V^* = \Lambda^1(V)$ definita da

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Cioè $\underset{\substack{\cap \\ V}}{e_i^*(v)} =$ coordinata i-esima di v.

Pongo

$$I(d,k) = \{ \underline{i} = (i_1, \dots, i_k) \ : \ 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq d \}$$

multi-indice

Per ogni $\underline{i} \in I(d,k)$ pongo

$$e^*_{\underline{i}} = e^*_{i_1} \wedge e^*_{i_2} \wedge \dots \wedge e^*_{i_k} \in \Lambda^k(V);$$

$$e_{\underline{i}} = (e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \in V^k;$$

e per ogni A matrice $d \times k$ pongo

$A_{\underline{i}}$ = minore di A formato dalle righe $i_1, \dots, i_k$

Prop. 1

$$e^*_{\underline{i}}(v_1, \dots, v_k) = \det(A_{\underline{i}})$$

dove A è la matrice delle coordinate dei vettori $v_1, \dots, v_k$ cioè $A_{ij} = e^*_i(v_j)$ = coord. i-esima di v_j.

In particolare $e^*_{\underline{i}}(e_{\underline{j}}) = \delta_{\underline{i}\,\underline{j}}$ perché $A_{\underline{i}}$ ha una riga nulla se $\underline{i} \neq \underline{j}$ e $A_{\underline{j}} = I$.

Dim. (traccia)

Per induzione su k: applicando la def. del prodotto $e^*_{\underline{i}} = e^*_{i_1} \wedge e_{\underline{i}'}$ con $\underline{i}' = (i_2, \dots, i_k)$ ottenete la formula per lo sviluppo di $\det(A_{\underline{i}})$ rispetto alla prima riga. $\square$

Lemma 2

Se $\alpha(e_{\underline{i}}) = 0 \quad \forall \underline{i} \in I(d,k)$ allora $\alpha = 0$.

$$\alpha(e_{\underline{i}}) = \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$$

Quindi se $\alpha(e_{\underline{i}}) = \tilde{\alpha}(e_{\underline{i}}) \ \forall \underline{i}$ allora $\alpha = \tilde{\alpha}$.

Dim.

Passo 1 : $\alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = 0 \quad \forall i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, d\}$

(ipotesi $\alpha(e_{\underline{i}}) = 0 \ \forall \underline{i}$ + alternanza)

Passo 2 : $\alpha(v_1, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) = 0 \quad \forall v_1 \in V,\ i_2, \dots, i_k \in \dots$

(linearità nella prima var.)

Passo 3 : $\alpha(v_1, v_2, e_{i_3}, \dots, e_{i_k}) = 0 \quad \forall v_1, v_2 \in V,\ i_3, \dots$

etc. etc. $\square$

Prop. 3

$\{ e^*_{\underline{i}} : \underline{i} \in I(d,k) \}$ è una base di $\Lambda^k(V)$.

In particolare $\forall \alpha \in \Lambda^k(V)$ vale

$$\alpha = \sum_{\underline{i}} \underbrace{\alpha(e_{\underline{i}})}_{= \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})} e^*_{\underline{i}}$$

Dim.

Posto $\tilde{\alpha} := \sum_{\underline{i}} \alpha(e_{\underline{i}}) e^*_{\underline{i}}$ ho che

$$\tilde{\alpha}(e_{\underline{j}}) = \sum_{\underline{i}} \alpha(e_{\underline{i}}) \underbrace{e^*_{\underline{i}}(e_{\underline{j}})}_{= \delta_{\underline{i}\,\underline{j}}} = \alpha(e_{\underline{j}})$$

e $\alpha = \tilde{\alpha}$ per il lemma 2.

L' indip. lineare di $\{ e^*_{\underline{i}} \}$ segue da $e^*_{\underline{i}}(e_{\underline{j}}) = \delta_{\underline{i}\,\underline{j}}$.

$\square$

Cor. 4

$$\dim(\Lambda^k(V)) = \begin{cases} 0 & \text{se } k > d \\ \# I(d,k) = \binom{d}{k} & \text{se } k \leq d \end{cases}$$

Prop. 5 (formula di Binet generalizzata)

Date $A, B \in \mathbb{R}^{d\times k}$ con $1 \leq k \leq d$ allora

$$\underbrace{\det(B^t A)}_{\in\,\mathbb{R}^{k\times k}} = \sum_{\underline{i} \in I(d,k)} \det(B_{\underline{i}}) \det(A_{\underline{i}})$$

In particolare $\det(A^t A) = \sum_{\substack{Q \text{ minore} \\ k\times k \text{ di } A}} (\det(Q))^2$

(cf. caratterizzazione di $|\det T|$ con $T: \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^d$ lineare)

Dim.

Pongo $\alpha(v_1, \dots, v_k) := \det(B^t A)$ per $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^d$

A = matrice di colonne $v_1, \dots, v_k$

Allora $\alpha \in \Lambda^k(\mathbb{R}^d)$ (verificatelo).

Allora per la propos. 3

$$\alpha(v_1, \dots, v_k) = \sum_{\underline{i}} \underbrace{\alpha(e_{\underline{i}})}_{=\det(B^t_{\underline{i}})} \cdot \underbrace{e^*_{\underline{i}}(v_1, \dots, v_k)}_{=\det(A_{\underline{i}})\ \leftarrow \text{Prop. 1}}$$

$\square$

Orientazione di V

Date due basi $(e_1, \dots, e_k)$ e $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k)$ di V dico che hanno la stessa orientazione, e scrivo

$$(e_1, \dots, e_k) \sim (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k)$$

se la matrice di cambio di base ha determ. > 0.

$\sim$ è una relazione di equivalenza

$[e_1, \dots, e_k]$ indica la classe di equiv. di $(e_1, \dots, e_k)$

ci sono solo due classi di equiv., dette orientazioni di V.

Date $v_1, \dots, v_k$ in $\mathbb{R}^d$ pongo

$$\mathrm{vol}(v_1, \dots, v_k) = \underset{\sigma_k}{\underset{\shortparallel}{\mathrm{vol}_k}}(R)$$

dove R è il "rett." generato da $v_1, \dots, v_k$ cioè

$$R := \Big\{ \underbrace{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i}_{\phi(\lambda)} \;\Big|\; \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in [0,1]^k \Big\}$$

Prop. 6

Sia $\alpha \in \Lambda^k(\mathbb{R}^d)$, V sottosp. k-dim. di $\mathbb{R}^d$ con base ortonormale $e_1, \dots, e_k$.

Allora $\forall\, v_1, \dots, v_k \in V$

matrice dei coeff. di v_i rispetto a $(e_1, \dots, e_k)$

$$(1) \qquad \alpha(v_1, \dots, v_k) = \alpha(e_1, \dots, e_k)\, \det(A)$$

e

$$(2) \qquad \det(A) = \pm \operatorname{vol}(v_1, \dots, v_k)$$

dove il segno è $+$ se $(v_1, \dots, v_k)$ ha la stessa orientaz. di $(e_1, \dots, e_k)$ e altrimenti è $-$ (se $v_1, \dots, v_k$ sono lin. dip. $\det(A) = \operatorname{vol}(v_1, \dots, v_k) = 0$).

Dim.

(1) segue dalla prop. 1.

(2) segue dal fatto che

$$\operatorname{vol}(v_1, \dots, v_k) = \operatorname{vol}_k(R) = \operatorname{vol}_k(\phi([0,1]^k)) = |\det A|$$

$\square$

Il punto è che $\alpha(v_1, \dots, v_k)$ dipende solo da $\operatorname{vol}(v_1, \dots, v_k)$ e dall'orientazione di $(v_1, \dots, v_k)$.

Notazione per k-covettori in $\mathbb{R}^d$

In $\mathbb{R}^d$, $(e_1, \dots, e_d)$ indica la base canonica

La base duale $(e_1^*, \dots, e_d^*)$ si indica con $dx_1, \dots, dx_d$

(effettivamente $e_i^* : x \longmapsto x_i$ coincide con il differenziale della funzione $x \longmapsto x_i$)

Scriviamo anche $dx_{\underline{i}}$ al posto $e_{\underline{i}}^*$ $\forall \underline{i} \in I(d,k)$.

Esempio di calcolo

$$\alpha_1 := dx_1 + 2dx_2 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^d)$$

$$\alpha_2 := 2\, dx_1 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_4 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^d)$$

Allora

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \wedge \alpha_2 &= (dx_1 + 2dx_2) \wedge (2dx_1 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_4) \\
&= \cancel{2\, \underbrace{dx_1 \wedge dx_1}_{=0}} \wedge dx_3 - dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \\
&\quad + 4\, dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 - \cancel{2\, \underbrace{dx_2 \wedge dx_2}_{=0}} \wedge dx_4 \\
&= -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - 4\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 .
\end{aligned}$$

Orientazione di una superficie

Data Σ sup. k-dim. in $\mathbb{R}^d$, un' orientaz. di Σ è una "mappa"

$$x \in \Sigma \longmapsto \overbrace{[\underbrace{\tau_1(x), \dots, \tau_k(x)}_{\text{base di } T_x\Sigma}]}^{\text{orient. di } T_x\Sigma}$$

Si chiede che l'orientaz. sia "continua".

Questo vuol dire che $\forall\, \phi : \underset{\mathbb{R}^k}{\overset{\cap}{D}} \to \Sigma \cap U$ param. regolare vale

$$[\underbrace{d_s\phi(e_1), \dots, d_s\phi(e_k)}_{\text{base di } T_x\Sigma \text{ con } x=\phi(s)}] = [\tau_1(x), \dots, \tau_k(x)] \quad \forall s \in D$$

oppure

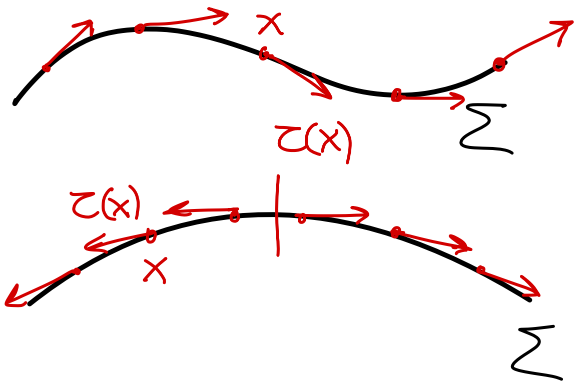
$$[d_s\phi(e_1), \dots, d_s\phi(e_k)] \neq [\tau_1(x), \dots, \tau_k(x)] \quad \forall s \in D$$

Nel primo caso diciamo che ϕ preserva l'orient.

nel secondo diciamo che ϕ inverte l'orient.

Esempi

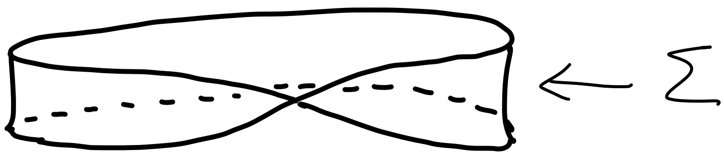
$\boxed{k=1}$



τ orient. continua di Σ

τ orient. non continua di Σ

$\boxed{k=2}$



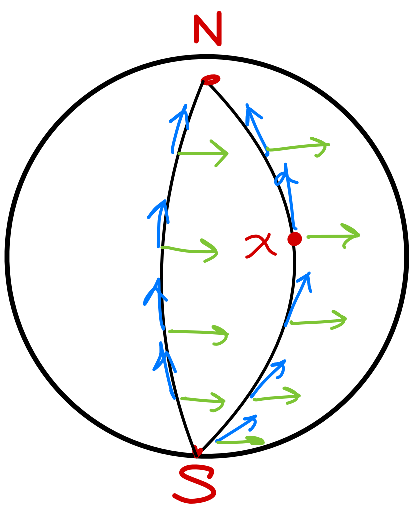
"nastro di Moebius"

Σ non ammette alcuna orientaz. continua ("non è orientabile")

$\boxed{k=2}$ $\quad \Sigma = \mathbb{S}^2 =$ sfera

Σ non ammette alcun campo di vettori tangente τ che sia continuo e $\neq 0$.

Ma è orientabile



τ_1 e τ_2 sono continui tranne che in N e S ma $[\tau_1, \tau_2]$ è continua.

Superficie con bordo

$\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ è una sup. di dim. k e classe C^m con bordo se $\forall x \in \Sigma$ $\exists U$ intorno aperto di x e $\phi : D \to \mathbb{R}^d$ di classe C^m t.c.

D aperto in $\mathbb{R}^k$

(i) $\phi : D \cap \underset{\substack{\parallel \\ (-\infty,0] \times \mathbb{R}^{k-1}}}{H} \longrightarrow \Sigma \cap U$ omeomorfismo;

(ii) $\mathrm{rk}\,(\nabla\phi(s)) = k \quad \forall s \in D.$

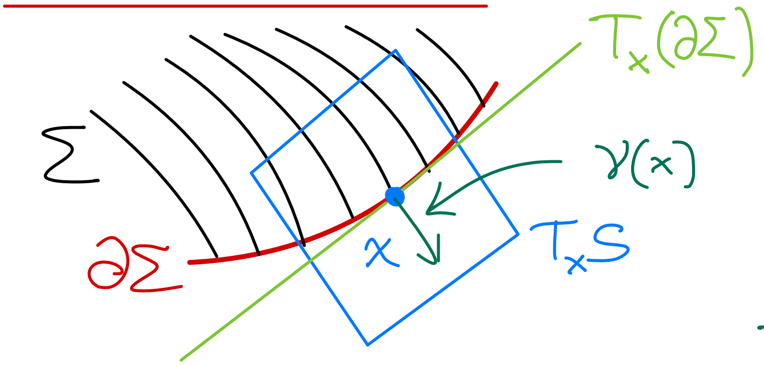
I punti di del bordo $\partial\Sigma$ sono quelli contenuti in $\phi(D \cap \underset{\substack{\parallel \\ \{0\} \times \mathbb{R}^{k-1}}}{\partial H})$.

Le sup. con bordo si scrivono localmente come

$$\Sigma \cap U = \{ x \in U : \ g(x) = 0 \ , \ \tilde{g}(x) \leq 0 \}$$

con $(g, \tilde{g}) : U \longrightarrow \mathbb{R}^{d-k} \times \mathbb{R}$ di classe C^m con $\mathrm{rk}\,(\nabla g \,|\, \nabla \tilde{g}) = d-k+1$.

Normale esterna



normale esterna a ∂S in x. ($|\nu|=1$, $\nu \in T_x S$, $\nu \perp T_x \partial S$, ν "punta fuori da Σ")

Orientazione del bordo

Data $[\tau_1, \dots, \tau_k]$ orientazione (continua) di Σ scelgo l'orientaz. $[V_1, \dots, V_{k-1}]$ di $\partial\Sigma$ in modo che

$$[\nu, V_1, \dots, V_{k-1}] = [\tau_1, \dots, \tau_k] \quad \forall x \in \partial\Sigma$$

Questa scelta dell' orient. di $\partial\Sigma$ è continua.

K-forme (su un aperto di $\mathbb{R}^d$)

Dato Ω aperto di $\mathbb{R}^d$ una k-forma su Ω è una mappa $\omega : \Omega \longrightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^d)$.

La scrivo "in coordinate" usando la base canonica di $\Lambda^k(\mathbb{R}^d)$:

$$\omega(x) = \sum_{\underline{i} \in I(d,k)} \omega_{\underline{i}}(x) \cdot dx_{\underline{i}}$$

coordinata $\underline{i}$-esima di ω

Dico che ω è di classe C^m, $m = 0, 1, \dots, \infty$ se ogni $\omega_{\underline{i}}$ è una funzione C^m su Ω.

Le 0-forme sono le funzioni reali su Ω.

Differenziale (esterno)

Data $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione (0-forma) il differenziale $d_x f = df(x)$ è un applic. lineare da $\mathbb{R}^d$ in $\mathbb{R}$ cioè df è una 1-forma:

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot dx_j$$

Data ω k-forma C^m, $m \geq 1$, su Ω pongo

$$d\omega := \sum_{\underline{i}} d\omega_{\underline{i}} \wedge dx_{\underline{i}} = \sum_{\underline{i}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_{\underline{i}}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{\underline{i}}$$

Quindi $d\omega$ è una $(k+1)$-forma C^{m-1}.

Prop. 7

- $\underset{k_1\text{-forma}}{d(\omega_1} \wedge \underset{k_2\text{-forma}}{\omega_2)} = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1}\omega_1 \wedge d\omega_2$;

- $d^2\omega = 0$.

La dimostrazione è un esercizio.

Pull-back di una k-forma

Data ω k-forma su Ω e $f : \Omega' \longrightarrow \Omega$ (Ω' aperto in $\mathbb{R}^{d'}$)
il pull-back di ω secondo f è
la k-forma $f^\# \omega$ su Ω' definita da

$$\underbrace{f^\#\omega(s)}_{\in \Lambda^k(\mathbb{R}^{d'})} := \underbrace{(d_s f)}_{\in Lin(\mathbb{R}^{d'};\mathbb{R}^d)}{}^{\#}\underbrace{\omega(f(s))}_{\in \Lambda^k(\mathbb{R}^d)}$$

Se ω è di classe C^m e f è di classe C^{m+1}
allora $f^\#\omega$ è di classe C^m.

Prop. 8

- $f^\#(\omega_1 \wedge \omega_2) = (f^\#\omega_1) \wedge (f^\#\omega_2)$
- $f^\#(d\omega) = d(f^\#\omega)$
- $f^\# g = g \circ f$ (g 0-forma o funzione)
- $f^\#(dx_i) = df_i \quad \forall i$.

Esempi di calcolo

- $d\big(\underbrace{(x_1^2+x_2^2)\,dx_1\wedge dx_3}_{2\text{-forma}}\big) = d(x_1^2+x_2^2)\wedge dx_1\wedge dx_3$

$$= (2x_1\,dx_1 + 2x_2\,dx_2)\wedge dx_1\wedge dx_3$$

$$= 2x_2\,dx_2\wedge dx_1\wedge dx_3$$

$$= -2x_2\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$$

- $f : \underset{\substack{\Downarrow\\ s}}{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \underset{\substack{\Downarrow\\ x}}{\mathbb{R}^3}$, $\quad f(s_1,s_2) := (\underset{x_1}{s_2^2}, \underset{x_2}{s_1^2}, \underset{x_3}{s_1 s_2})$

$\omega(x) := x_2\,dx_1\wedge dx_3$

Allora

$$f^\# \omega(s) = (s_1)^2 \cdot d(s_2^2)\wedge d(s_1 s_2)$$

$$= s_1^2\,(2s_2\,ds_2)\wedge(s_2\,ds_1 + s_1\,ds_2)$$

$$= 2s_1^2 s_2^2\,ds_2\wedge ds_1$$

$$= -2s_1^2 s_2^2\,ds_1\wedge ds_2$$

Integrazione di k-forme su superfici orientate

Sia ω k-forma su Ω aperto di $\mathbb{R}^d$,
sia Σ superficie di dim. k contenuta in Ω
(con bordo) orientata.
Scelgo $\tau_1,\dots,\tau_k$ che danno l'orientazione in modo che $\mathrm{vol}(\tau_1,\dots,\tau_k) = 1$.

Definisco

$$\int_\Sigma \omega := \int_\Sigma \underbrace{\langle \omega(x) ; \overbrace{\tau_1(x), \dots, \tau_k(x)}^{\text{base di } T_xS} \rangle}_{} \, d\sigma_k(x)$$

dipende solo dall'
orientazione e dal
$vol(\tau_1, \dots, \tau_k) = 1$
NON dipende dalla
scelta specifica di $\tau_1, \dots, \tau_k$

— la def. è ben posta! —

Prop. 9

Se $\phi : D \to \Sigma \cap U$ è una param. reg.

che preserva l'orientazione allora

$$\int_{\Sigma \cap U} \omega = \int_D \phi^\# \omega = \int_D h(x) \, dx$$

$\phi^\# \omega$ è k-forma su $D \subset \mathbb{R}^k$
allora $\phi^\# \omega = h(x) \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$

Teorema 10 (Stokes)

Data ω $(k-1)$-forma di classe C^1 su Ω aperto di $\mathbb{R}^d$,

Σ sup. con bordo k-dim. compatta e

orientata contenuta in Ω, allora

$$\int_{\partial \Sigma} \omega = \int_\Sigma d\omega$$

(l'orientazione di $\partial\Sigma$ è quella indotta dall' orient.
di Σ).

Se $K = d$, $\Omega = \mathbb{R}^d$, allora Σ è un compatto con bordo C^1 e il teorema di Stokes è il teorema della divergenza.