AM3 20/21

lezione 18
seconda parte
2/11/2020

Equazione del calore

Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^d$ e $u: [0,T) \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$

per $d=3$, Ω rappresenta un solido di materiale conduttore (del calore) omogeneo.

$u(t,x)$ rappresenta la temperatura all' istante t nel punto x.

Se non ci sono sorgenti di calore interne al solido allora u soddisfa:

$$u_t = c \cdot \Delta u$$

$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$

$\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$

costante del materiale:

$c = \frac{c_1}{c_2}$ ← conducib. ← capacità (termica)

La soluzione u è univocamente determinata conoscendo il valore di u al tempo $t=0$ cioè u soddisfa la condizione iniziale

$$u(0,x) = u_0(x)$$

con u_0 data, e imponendo delle opportune condizioni al bordo

Per esempio:

Condizione di Neumann: $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ su $\overset{[0,T)\times}{\vee}\partial\Omega$

$\nu =$ normale esterna a $\partial\Omega$

Questo corrisponde a non avere scambio di calore attraverso $\partial\Omega$ (per. es., il solido è sospeso nel vuoto)

Condizione di Dirichlet: $u = v_0$ su $\overset{[0,T)\times}{\vee}\partial\Omega$

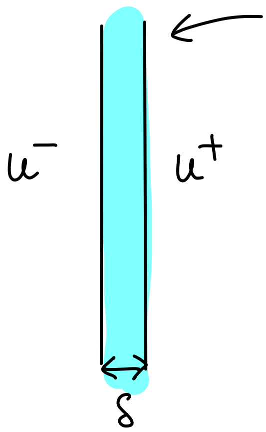
Questo corrisponde ad avere temperatura assegnata su $\partial\Omega$ (per es., il solido è immerso in un serbatoio di calore mantenuto a temperatura costante).

AM3 20/21

lezione 19
4/11/2020

Derivazione dell'equazione del calore

Legge fisica 1 (trasmissione del calore attraverso una parete sottile)



parete sottile di materiale conduttore omogeneo

δ = spessore, A = area della parete

u^- temperatura a sinistra (costante)

u^+ " " destra "

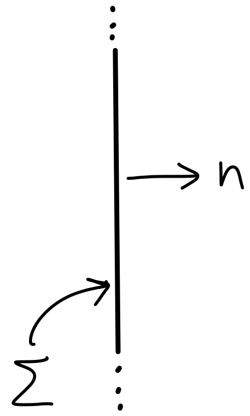
"La quantità di energia termica che passa da dx. verso sin. per unità di tempo e di superficie è proporzionale a $\Delta u = u^+ - u^-$ e inversamente proporzionale a δ.", Cioè

$$\Delta E = \underset{\uparrow}{c_1} \frac{\Delta u}{\delta} \Delta t \cdot A$$

Conducibilità termica del materiale

Questa è l'espressione infinitesima della legge di trasmissione del calore.

Variante 1 (limite per $\delta \to 0$)



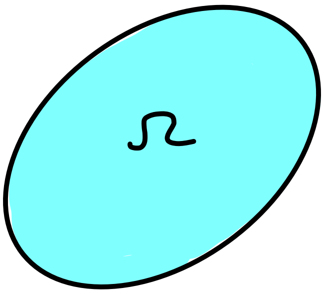
area di Σ

$$\Delta E = c_1 \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \Delta t \cdot A$$

energia termica che attraversa la sup. da destra verso sin. nell' intervallo di tempo Δt

derivata normale della temperatura (presupposta costante su Σ)

Variante 2 (non infinitesima)



energia termica in Ω al tempo t

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \underbrace{\int_{\partial\Omega} c_1 \frac{\partial u}{\partial n}}_{\text{flusso uscente di } \nabla u}$$

teorema della diverg. $\longrightarrow$ $= \int_{\Omega} c_1 \operatorname{div}(\nabla u) = \int_{\Omega} c_1 \Delta u$

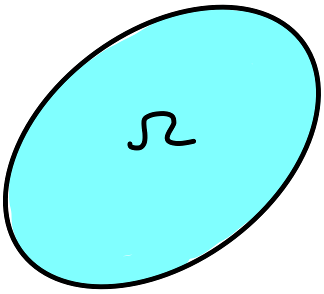
Legge fisica 2

" L' aumento di temperatura in un solido è direttamente proporzionale all' energia termica immessa e inversamente proporzionale al volume "

$$C_2 \, \Delta u = \frac{\Delta E}{V}$$

capacità termica del materiale

Variante (non infinitesima)



come prima: energia termica in Ω

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int_\Omega c_2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

Quindi

$$\int_\Omega c_2 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} = \int_\Omega c_1 \Delta u$$

Siccome questo vale anche per i sottoinsiemi di Ω, devo avere

$$c_2 \frac{\partial u}{\partial t} = c_1 \Delta u$$

Risoluzione dell'equazione del calore

nel caso di un anello "sottile" di materiale conduttore omogeneo nel vuoto (non c'è scambio di calore con l'esterno)

Parametrizzo l'anello con $[-\pi,\pi]$.

$$u : \underset{\substack{\cup\!\!\!\!\mid \\ t}}{[0,T)} \times \underset{\substack{\cup\!\!\!\!\mid \\ x}}{[-\pi,\pi]} \longrightarrow \mathbb{R}$$ = temperatura (al tempo t e nella posizione x)

soddisfa il seguente problema

$$(P) \quad \begin{cases} u_t = \cancel{c}\, u_{xx} \\ u(\cdot,\pi) = u(\cdot,-\pi) \\ u_x(\cdot,\pi) = u_x(\cdot,-\pi) \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot) \end{cases}$$

$u(\cdot,\pi) = u(\cdot,-\pi)$, $u_x(\cdot,\pi) = u_x(\cdot,-\pi)$ } condizioni di periodicità al bordo

$u(0,\cdot) = u_0(\cdot)$ } condizione iniziale

con u_0 temperatura iniziale assegnata

Osservo.

- normalmente si parla di eq. del calore sul dominio spaziale $[-\pi,\pi]$ (in generale Ω) e non si specifica l'intervallo temporale. Perché è incognito come per le eq. diff. ord.

- Condizioni di periodicità + equaz. implicano che $D_x^k u(\cdot,\pi) = D_x^k u(\cdot,-\pi)$

Infatti $u(\cdot,\pi) = u(\cdot,-\pi) \Longrightarrow u_t(\cdot,\pi) = u_t(\cdot,-\pi)$

$\Longrightarrow u_{xx}(\cdot,\pi) = u_{xx}(\cdot,-\pi)$

$u_x(\cdot,\pi) = u_x(\cdot,-\pi) \Longrightarrow u_{xt}(\cdot,\pi) = u_{xt}(\cdot,-\pi)$

$\Longrightarrow u_{xxx}(\cdot,\pi) = u_{xxx}(\cdot,-\pi)$

e così via...

Risoluzione "formale„ di (P)

Scrivo $u = u(t,x)$ in serie di F. rispetto a x:

$$u(t,x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \underset{\substack{\| \\ c_n(u(t,\cdot))}}{c_n(t)} \cdot e^{inx}$$

derivando rispetto a t e x (due volte) ottengo:

$$\begin{aligned} u_t &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n'(t)\, e^{inx} \\ &\| \\ u_{xx} &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(t)\,(-n^2)\, e^{inx} \end{aligned}$$

per l'eq. diff. in (P)

quindi per ogni t vale $c_n'(t) = -n^2 c_n(t)$.

Inoltre $u(0,\cdot) = u_0 \Longrightarrow c_n(0) = c_n(u_0) =: c_n^0$

Quindi $c_n(\cdot)$ risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = c_n^0 \end{cases}$$

ovvero $c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}$, e quindi

$$u(t,x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx}$$

Osserv.

- Risoluzione non rigorosa (va resa rigorosa).
- Se tutto funziona otteniamo che u è unica (perché i coefficienti c_n sono univocamente determ. dal problema di Cauchy)
- u è C^∞ per $t > 0$: i coeff. $c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}$ tendono a 0 per $n \to \pm\infty$ più che polinom. e quindi $\sum |n|^k |c_n(t)| < +\infty \quad \forall k$ quindi $u(t,\cdot)$ è C^∞.
- In generale u non esiste per $t < 0$ (se u_0 non è C^∞).
- Queste sono sono caratteristiche generali dell'eq. del calore in ogni dimensione.

Risultati rigorosi

- Teorema di esistenza (di una soluzione C^∞ per ogni $t>0$);
- Teorema di unicità (di una soluzione definita per $t<\delta$ e con ipotesi di regolarità minimali);
- Teorema di non esistenza nel passato (per u_0 non troppo regolare).

Teorema 1 (di esistenza)

Data $u_0 : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ continua t.c. $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n^0| < +\infty$, allora

(1) la formula

$$(*) \qquad u(t,x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{c_n^0 \, e^{-n^2 t} \, e^{inx}}_{u_n(t,x)}$$

definisce una funzione $u : [0,+\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continua tale che $u(0,\cdot) = u_0(\cdot)$; se u_0 è reale anche u è reale;

(2) u è C^∞ su $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$ e soddisfa $u_t = u_{xx}$;

(3) u è 2π-periodica in x e in particolare soddisfa le condizioni di periodicità in (P) per $t > 0$.

prodotto di intervalli (aperti/chiusi/...)

Lemma 2

Sia R un rettangolo in $\mathbb{R}^d$, $v_n : R \to \mathbb{C}$ funzioni di classe C^k t.c.

- $v_n \to v$ uniformemente su R;
- tutte le derivate parziali di v_n di ordine $\leq k$ convergono uniformemente, cioè $\forall\, \underline{h} = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{N}^d$ t.c. $|\underline{h}| := h_1 + \dots + h_d \leq k$ $D^{\underline{h}} v_n = D_1^{h_1} D_2^{h_2} \dots D_d^{h_d} v_n$ conv. unif. in n.

Allora v è di classe C^k e $D^{\underline{h}} v = \lim_{n \to +\infty} D^{\underline{h}} v_n$ per ogni $\underline{h}$ con $|\underline{h}| \leq k$.

Dimostrazione per esercizio.

Osserv.

- L'enunciato segue dal caso particolare $k=1$ e $R =$ intervallo in $\mathbb{R}$, che è noto.
- Normalmente le funzioni C^k sono definite solo per domini aperti di $\mathbb{R}^d$, la definizione per domini non aperti non è "pulita", tranne che nel caso dei rettangoli. Che sono quelli che ci servono per le EDP.

AM3 20/21

Lezione 20

5/11/2020

Riprendo dalla lezione di ieri.

Stavamo risolvendo il seguente problema:

$$(P) \begin{cases} u_t = \cancel{c}\, u_{xx} \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot) \end{cases} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{condizioni di periodicità al bordo} \\ \} \text{ condizione iniziale} \end{matrix}$$

Teorema 1 (di esistenza)

Data $u_0 : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ continua t.c. $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n^0| < +\infty$, allora

(1) la formula

$$(*) \qquad u(t,x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{c_n^0\, e^{-n^2 t}\, e^{inx}}_{u_n(t,x)}$$

definisce una funzione $u : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua tale che $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$; se u_0 è reale anche u è reale;

(2) u è C^∞ su $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ e soddisfa $u_t = u_{xx}$;

(3) u è 2π-periodica in x e in particolare soddisfa le condizioni di periodicità in (P) per $t > 0$.

Osserv.

- La condizione $\sum_{-\infty}^{\infty} |C_n^0| < +\infty$ è soddisfatta se $u_0 \in C^1([-\pi, \pi])$ e $u_0(-\pi) = u_0(\pi)$.
  Ma non è soddisfatta da tutte le u_0 continue tali che $u_0(-\pi) = u_0(\pi)$.

- Se $C_n^0 = 0$ tranne che per un numero finito di indici n, allora u è definita su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e la dimostrazione del Teorema 1 è immediata.

Cor. 3 (del lemma 2 della lezione preced.)

Sia R un rettangolo in $\mathbb{R}^d$ e siano $u_n : R \to \mathbb{C}$ funzioni di classe C^k t.c.

$$\sum_n \| D^{\underline{h}} u_n \|_\infty < +\infty \quad \forall \underline{h} \in \mathbb{N}^d \text{ con } |\underline{h}| \leq k$$

allora $u := \sum_n u_n$ è una funzione ben definita su R e di classe C^k, inoltre

$$D^{\underline{h}} u = \sum_n D^{\underline{h}} u_n .$$

In particolare se $\sum_n \| D^{\underline{h}} u_n \|_\infty < +\infty \quad \forall \underline{h} \in \mathbb{N}^d$ u è C^∞.

Lemma 4

Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^d$, $u : \Omega \to \mathbb{C}$, $\{A_i\}$ famiglia di aperti con unione $A \subset \Omega$, tali che $u \in \mathcal{C}^k(A_i)$. Allora $u \in \mathcal{C}^k(A)$.

Variante:

Sia R rettangolo in $\mathbb{R}^d$, $u : R \to \mathbb{C}$, $\{R_i\}$ rettangoli aperti relativamente a R con unione $\tilde{R}$ e t.c. $u \in C^k(R_i)$. Allora $u \in \mathcal{C}^k(\tilde{R})$.

Lemma 5 Sia $f \in L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$. Allora f è (q.o.) reale sse $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Dim.

Se f è reale, cioè $f = \overline{f}$, allora

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\; \overline{e^{inx}}\, dx$$

$$= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{inx}\, dx} = \overline{c_{-n}(f)}$$

cioè $c_n = \overline{c_{-n}}$, ovvero $c_{-n} = \overline{c_n}$.

Viceversa, se $c_{-n} = \overline{c_n}$ allora $c_0 \in \mathbb{R}$ e

$$f(x) \underset{\underset{\text{q.o.}}{\uparrow}}{=} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{inx} + \overline{c_n}\, e^{-inx}\right)$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left(c_n e^{inx}\right) . \qquad \square$$

Provate a dimostrare questo risultato per $f \in L^1$.

Dimostrazione del Teorema 1

(1) Pongo $R := [0,+\infty) \times \mathbb{R}$. Osservo che

$$\|u_n\|_{L^\infty(R)} = \| c^0_n e^{-n^2t} e^{inx} \|_{L^\infty(R)} = |c^0_n|$$

Per ipotesi $\sum_n |c^0_n| < +\infty$ cioè $\sum_n \|u_n\|_{L^\infty(R)} < +\infty$, e quindi u è ben def. e continua su R. Inoltre u_0 e $u(0,\cdot)$ hanno gli stessi coeff. di Fourier, quindi $u_0 = u(0,\cdot)$ q.o. e siccome u_0, $u(0,\cdot)$ sono continue ho che $u_0 = u(0,\cdot)$ su $[-\pi,\pi]$.

Infine u_0 reale $\Rightarrow$ $c^0_{-n} = \overline{c^0_n}$ $\Rightarrow$

$$\underset{\substack{\| \\ c_{-n}(u(t,\cdot))}}{c^0_{-n} e^{-n^2t}} = \underset{\substack{\| \\ c_n(u(t,\cdot))}}{\overline{c^0_n e^{-n^2t}}} \Rightarrow u(t,\cdot) \text{ è q.o. reale } \forall t \geq 0$$

Inoltre u è continua, e quindi u è reale.

(2) $\forall \delta \geq 0$ pongo $R_\delta := [\delta,+\infty) \times \mathbb{R}$.

Osservo che $\forall k, \ell \in \mathbb{N}$

$$D^k_t D^\ell_x u_n = c^0_n (-n^2)^k (in)^\ell e^{-n^2t} e^{inx}$$

e quindi

$$\| D^k_t D^\ell_x u_n \|_{L^\infty(R_\delta)} = |c^0_n| \, |n|^{2k+\ell} e^{-n^2}$$

quindi $\sum_n \| D_t^k D_x^h u_n \|_{L^\infty(R_\delta)} < +\infty$ per $\delta > 0$ $\forall k, h$,

quindi $u \in \mathcal{E}^\infty(R_\delta)$ per il Coroll. 3.

in particolare u è C^∞ su $\bigcup_{\delta>0} (\delta, +\infty) \times \mathbb{R} = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$.

Per far vedere che $u_t = u_{xx}$ osservo che $(u_n)_t = (u_n)_{xx}$ e che l'equazione è lineare omogenea:

$$u_t = \Big(\sum_n u_n\Big)_t \overset{\text{Coroll. 3}}{=} \sum_n (u_n)_t = \sum_n (u_n)_{xx} \overset{\text{Coroll. 3}}{=} \Big(\sum u_n\Big)_{xx} = u_{xx}$$

(3) E' immediato. $\square$

Terminologia

Sia R rettangolo in $\mathbb{R}^d$, $u : R \to \mathbb{C}$.

Dico che u è di classe C^k nelle var. $x_1, \dots, x_n$ (con $n < d$) se le derivate parziali $D^{\underline{h}} u$ esistono e sono continue su R per ogni $\underline{h} = (h_1, \dots, h_n, 0, .., 0)$ con $|\underline{h}| \leq k$.

Teorema 6 (di unicità)

Sia $u : [0, T) \times [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ funzione continua, e di classe C^1 in t, C^2 in x su $(0, T) \times [-\pi, \pi]$, che risolve (P) con u_0 continuo.

Allora u è unica.

Lemma 7

intervallo

Sia $u : I \times [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ e sia $c_n(t) := c_n(u(t,\cdot))$ $\forall n$.

Se u è continua c_n è continua su I.

Se u è $\mathcal{C}^k$, c_n è $\mathcal{C}^k$ su I e $D^h c_n(t) = c_n(D_t^h u(t,\cdot))$ $\forall h \leq k$.

Dim

Ricordo che

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)\, e^{-inx}\, dx.$$

La continuità segue dal teor. di conv. dominata.

Il resto dell'enunciato segue dal teorema di derivazione sotto il segno di integrale (applicato k volte).

□

Lemma 8

Sia $y : [0,T) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ funzione continua su $[0,T)$ e derivabile su $(0,T)$ che risolve l'eq. diff. ordinaria $\dot{y} = f(t,y)$ su $(0,T)$ con $f : [0,T) \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ continua.

Allora y è C^1 su $[0,T)$ e risolve $\dot{y} = f(t,y)$ su $[0,T)$.

Fate voi la dimostrazione.

Dim. del teorema 6

Pongo come al solito $c_n(t) := c_n(u(t,\cdot))$.

Voglio far vedere che c_n risolve un problema di Cauchy su $[0,T)$ è quindi è univocamente determinata $\forall n \ \forall t \in [0,T)$.

Per il lemma 7 (con $I=[0,T)$) c_n è continua su $[0,T)$ e (con $I=(0,T)$) c_n è C^1 su $(0,T)$ e $\forall t \in (0,T)$

$$\dot{c}_n(t) \overset{\text{lemma 7}}{=} c_n(u_t(t,\cdot))$$

$$u_t = u_{xx} \longrightarrow \ = c_n(u_{xx}(t,\cdot))$$

$$\text{condizioni al bordo + lemma visto in preced.} \longrightarrow \ = (in)^2 c_n(u(t,\cdot)) = -n^2 c_n(t)$$

Quindi c_n soddisfa $c_n(0) = c_n^0$ e l'eq. $\dot{y} = -n^2 y$ per $t \in (0,T)$. Per il lemma 8 risolve il pb. di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = c_n^0 . \end{cases}$$

□

AM3 20/21

lezione 21

9/11/2020

Completo la discussione dell' eq. del calore.

Ricordo il problema:

$$(P)\begin{cases} u_t = \cancel{c}\, u_{xx} & \\ u(\cdot,\pi) = u(\cdot,-\pi) & \left.\right\} \text{condizioni di periodicità al bordo} \\ u_x(\cdot,\pi) = u_x(\cdot,-\pi) & \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot) & \left.\right\} \text{Condizione iniziale} \end{cases}$$

<u>Notazione</u>

Indico con C^k_{per} l' insieme delle funzioni $u \in C^k(\mathbb{R})$ che sono 2π-periodiche.

Teorema 9 (di non esistenza nel passato)

Esiste $u_0 \in C^\infty_{per}$ t.c. (P) non ammette alcuna soluzione u definita su $(-\delta, 0] \times [-\pi,\pi]$ con $\delta > 0$.

Dim.

Scelgo c^0_n con $n \in \mathbb{Z}$ t.c.

(a) $|c^0_n| = O(|n|^{-k})$ per $n \to \pm\infty$ $\forall\, k > 0$;

(b) $|c^0_n|\, e^{n^2 s} \longrightarrow +\infty$ per $n \to \pm\infty$ $\forall\, s > 0$.

Per esempio $c^0_n := e^{-|n|}$.

Pongo $u_0 := \sum_{-\infty}^{+\infty} c^0_n e^{inx}$.

Per quanto visto in precedenza, (a) $\Rightarrow$ $u_0 \in C^\infty_{per}$.

Suppongo per assurdo che esista u soluzione di (P) definita su $(-\delta, 0] \times [-\pi, \pi]$, e pongo $\forall t \in (-\delta, 0]$ $c_n(t) := c_n(u(t, \cdot))$ come al solito.

Dalla dimostrazione del teorema di unicità (Teor. 6 della lezione precedente) so che $c_n(t) = c_n^0 \, e^{-n^2 t}$ $\forall t \in (-\delta, 0]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Preso $t \in (-\delta, 0)$, (b) $\Rightarrow$ $|c_n(t)| \longrightarrow +\infty$ per $n \to \pm\infty$, in contraddizione con il fatto che $c_n(t) \in \ell^2$. ☐

Esercizio

Dato u_0, sia T_* il massimo T tale che la soluz. di (P) è definita su $(-T, 0]$.

Caratterizzare T_* in termini del comportamento asintotico di $|c_n^0|$ per $n \to \pm\infty$, per la precisione il comportamento di $\dfrac{\log |c_n^0|}{n^2}$.

Equazione delle onde (lineare e scalare)

Versione generale: Ω aperto (regolare) in $\mathbb{R}^d$, I intervallo di tempo, u funzione (regolare) su $I \times \overline{\Omega}$, $v \in (0,+\infty)$. L'equazione delle onde è

$$\underset{\overset{\uparrow}{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}}{u_{tt}} = v^2 \underset{\overset{\uparrow}{\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \operatorname{div}_x(\nabla_x u)}}{\Delta u}$$

La costante v si chiama velocità di propagazione.

La soluzione è univocamente determinata se si specificano le condizioni iniziali

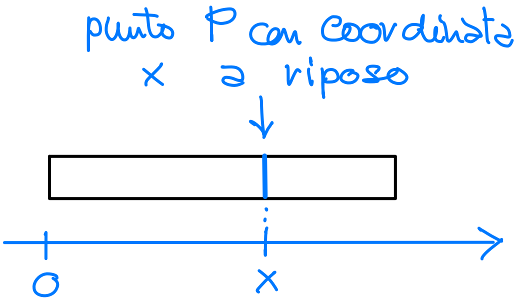
$$u(0,\cdot) = u_0, \quad u_t(0,\cdot) = u_1$$

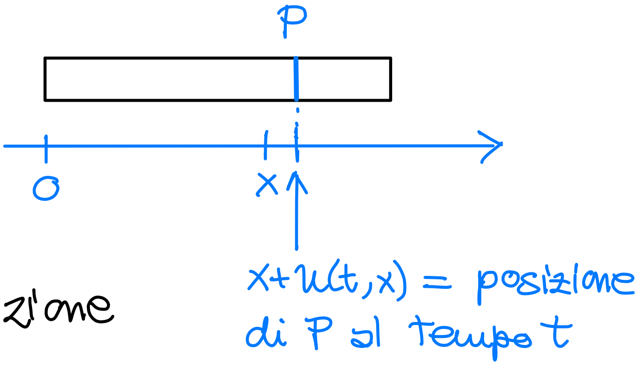
e delle condizioni al bordo, per esempio Dirichlet $(u(\cdot,x)=0 \quad \forall x \in \partial\Omega)$ o Neumann $\left(\underset{\overset{\uparrow}{\text{derivata normale.}}}{\frac{\partial u}{\partial \nu}}(\cdot,x)=0 \ \forall x\in\partial\Omega\right)$

Interpretazione fisica

$d=1$ $\quad$ Ω è un intervallo e rappresenta una sbarra sottile di materiale elastico omogeneo (ad esempio un metallo)

In presenza di un' onda sonora i punti della sbarra oscillano orizzontalmente (onda longitudinale o onda di pressione)



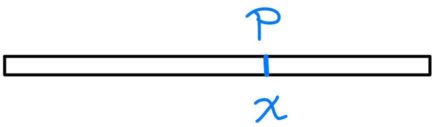


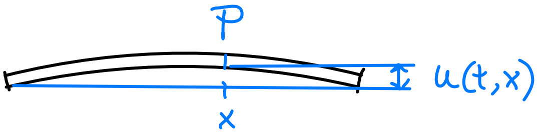
Allora u soddisfa l'equazione

$$u_{tt} = v^2 u_{xx}$$

con v velocità di propagazione del suono.

d=2 Ω rappresenta una piastra sottile di materiale elastico che vibra verticalmente (onde trasversali)





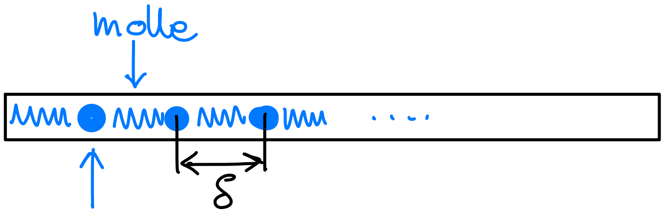
$u(t,x)$ = spostamento (verticale) al tempo t del punto P di coordinata $x \in \Omega$ a riposo.

Allora u soddisfa l'eq. $u_{tt} = v^2 \Delta u$ (per oscillazioni piccole).

Derivazione per onde longitudinali in dim. $d=1$

(senza ricorrere alla teoria dell' elasticità)

Idea: approssimare la sbarra con un sistema di "molle".



masse puntiformi a distanza δ (a riposo)

massa di ciascun punto : $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{densità} \\ \text{del mater.}}}{\rho} \cdot \delta \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sezione della} \\ \text{sbarra}}}{A}$

Legge di Hooke per le molle (lineari):

la forza esercitata dalla molla su un estremo è direttamente proporzionale all' allungamento della molla (rispetto alla lunghezza a riposo):

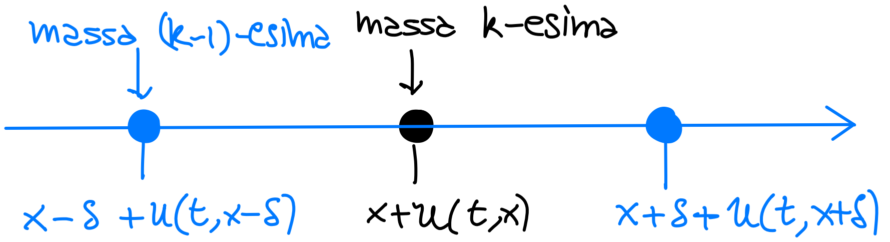
$$F = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante} \\ \text{elastica} \\ \text{della molla}}}{c} \; \Delta \ell$$

se immagino che la molla sia formata da una sezione di lunghezza δ della sbarra

$$c = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante elastica} \\ \text{del materiale}}}{c_e} \cdot \frac{A}{\delta}$$

Considero la massa k-esima della sbarra

(posizione a riposo $x = k\delta$, posiz. in movimento $x + u(t,x)$)



allungamento della molla a sin.: $u(t,x)-u(t,x-\delta)$

allungamento della molla a dx.: $u(t,x+\delta)-u(t,x)$

forza della molla a sin.: $-C_e\frac{A}{\delta}\big(u(t,x)-u(t,x-\delta)\big)$

forza della molla a dx.: $+C_e\frac{A}{\delta}\big(u(t,x+\delta)-u(t,x)\big)$

forza totale: $F = C_e\frac{A}{\delta}\big(u(t,x+\delta)-2u(t,x)+u(t,x-\delta)\big)$

Quindi $ma = F$ diventa

$$\rho\cdot\delta\cdot A\cdot\underbrace{u_{tt}(t,x)}_{\substack{\text{acceleraz.}\\ \text{della massa}\\ \text{k-esima}\\ \text{(in posiz. di}\\ \text{riposo } x)}} = C_e\frac{A}{\delta}\big(u(t,x+\delta)-2u(t,x)+u(t,x-\delta)\big)$$

Cioè

$$u_{tt}(t,x) = \frac{C_e}{\rho}\,\frac{u(t,x+\delta)-2u(t,x)+u(t,x-\delta)}{\delta^2}$$

e passando al limite per $\delta\to0$

$$u_{tt} = \frac{C_e}{\rho}\,u_{xx}$$

(Uso che per $f\in C^2(\mathbb{R})$ $\lim_{\delta\to0}\frac{f(x+\delta)-2f(x)+f(x-\delta)}{\delta^2} = f''(x)$)

AM3 20/21 Lezione 22

11/11/2020

Risoluzione dell' eq. delle onde in dimensione 1 tramite SdF

$$(P) \begin{cases} u_{tt} = v^2 u_{xx} & (v>0 \text{ fissato}) \\ \text{condiz. di periodicità al bordo} & u(\cdot,-\pi)=u(\cdot,\pi) \\ & u_x(\cdot,-\pi)=u_x(\cdot,\pi) \\ \text{condizione iniziale} & u(0,\cdot)=u_0, \ u_0 \text{ funz. data} \end{cases}$$

Risoluzione formale: scrivo $u(t,x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(t)\, e^{inx}$

$$\begin{matrix} u_{tt} & = & v^2 u_{xx} \\ \| & & \| \\ \sum \ddot{c}_n e^{inx} & & \sum -n^2 v^2 c_n e^{inx} \end{matrix}$$

quindi $\ddot{c}_n = -n^2 v^2 c_n$, quindi c_n risolve

$$\begin{cases} \ddot{y} = -n^2 v^2 y \\ y(0) = c_n^0 := c_n(u_0) \\ \dot{y}(0) = c_n^1 := c_n(u_1) . \end{cases}$$

per $n=0$, $c_0(t) = c_0^0 + c_0^1 t$

per $n \neq 0$, $c_n(t) = \alpha_n e^{invt} + \beta_n e^{-invt}$

con $\alpha_n = \frac{c_n^0}{2} + \frac{c_n^1}{2inv}$; $\beta_n = \frac{c_n^0}{2} - \frac{c_n^1}{2inv}$

Infine

$$u(t,x) = c_0^0 + c_0^1 t + \sum_{n\neq 0} \left(\alpha_n e^{in(x+vt)} + \beta_n e^{in(x-vt)} \right)$$

riscrivo u come

$$u(t,x) = c_0^0 + c_0^1 t + \varphi^+(x+vt) + \varphi^-(x-vt)$$

$\varphi^+(x+vt)$ e $\varphi^-(x-vt)$ sono onde viaggianti.

Attenzione: la seconda formula è specifica dell'eq. delle onde; cambiando di poco l'eq. non vale una formula analoga.

Usando entrambe le formule ottengo un teorema di esistenza.

Teorema 1 (Esistenza, 1ª versione)

Se $u_0 \in C^2_{per}$ e $u_1 \in C^1_{per}$, allora esistono $c_0^0, c_1^0 \in \mathbb{C}$ e $\varphi^+, \varphi^- \in C^2_{per}$ con integrale nullo sul periodo t.c.

$$(*) \qquad u(t,x) := c_0^0 + c_1^0 t + \varphi^+(x+vt) + \varphi^-(x-vt)$$

è una funzione C^2 su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, 2π-periodica in x, che risolve (P).

Inoltre se u_0 e u_1 sono funzioni reali, u è reale.

Lemma 2

Data $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua con primitiva g e $T>0$, allora g è T-periodica $\iff$ h è T-periodica e $\int_0^T h(x)\,dx = 0$.

Dim. $$g(x+T) - g(x) = \int_x^{x+T} h(t)\,dt \overset{\text{se } h \text{ è } T\text{-per.}}{=} \int_0^T h(t)\,dt$$

$\Rightarrow$ g T-per $\Rightarrow$ h T-per e $0 = \int_x^{x+T} h\,dt$.

$\Leftarrow$

Dim.

Passo 1: presi c_0^0, c_0^1, φ^+ e φ^- come sopra, u è sempre C^2 su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, 2π-per. in x

($\Longrightarrow$ u soddisfa le cond. di periodicità in (P))

e $u_{tt} = v^2 u_{xx}$.

Infatti $u_{tt} = v^2 \ddot{\varphi}^+(x+vt) + v^2 \ddot{\varphi}^-(x-vt) = v^2 u_{xx}$.

Passo2 : cerco c_0^0, c_0^1 e $\varphi^\pm$ t.c. u soddisfa le condizioni iniziali in (P):

$$\begin{cases} c_0^0 + \varphi^+ + \varphi^- = u_0 \\ c_0^1 + v(\dot\varphi^+ - \dot\varphi^-) = u_1 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} \varphi^+ + \varphi^- = u_0 - c_0^0 =: g_0 \in C^2 \\ (\varphi^+ - \varphi^-)' = \dfrac{u_1 - c_0^1}{v} = h_1 \in C^1 \end{cases}$$

pongo $c_0^0 := \fint_{-\pi}^{\pi} u_0$, $c_0^1 := \fint_{-\pi}^{\pi} u_1$,

in modo che g_0 e h_1 hanno integrale nullo sul periodo.

Per il lemma 2, h_1 ammette una primitiva $g_1 \in C^2_{per}$ e posso chiedere $\int_{-\pi}^{\pi} g_1 = 0$.

Il sistema diventa

$$\begin{cases} \varphi^+ + \varphi^- = g_0 \\ \varphi^+ - \varphi^- = g_1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \varphi^+ = \dfrac{g_0 + g_1}{2} \\ \varphi^- = \dfrac{g_0 - g_1}{2} \end{cases} \qquad \square$$

Teorema 3 (Esistenza, 2^a versione)

Dati $u_0, u_1 : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue t.c.

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |n|^2 \underset{\substack{\| \\ c_n(u_0)}}{|c_n^0|} < +\infty \quad \text{e} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} |n| \underset{\substack{\| \\ c_n(u_1)}}{|c_n^1|} < +\infty ,$$

allora

$$(*) \qquad u(t,x) := \underbrace{c_0^0 + c_0^1 t}_{v_0} + \sum_{n\neq 0} \underbrace{\alpha_n e^{in(x+vt)} + \beta_n e^{in(x-vt)}}_{v_n}$$

con $\alpha_n := \dfrac{c_n^0}{2} + \dfrac{c_n^1}{2inv}$, $\beta_n := \dfrac{c_n^0}{2} - \dfrac{c_n^1}{2inv}$,

è una funzione di classe C^2 su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, 2π- per. in x che risolve (P).

Inoltre se u_0 e u_1 sono funzioni reali, u è reale.

Osserv. $u_0 \in C^3_{per} \Longrightarrow \sum_n |n|^2 |c_n^0| < +\infty \Longrightarrow u_0 \in C^2_{per}$.

$u_1 \in C^2_{per} \Longrightarrow \sum_n |n||c_n^0| < +\infty \Longrightarrow u_1 \in C^1_{per}$.

Dim.

Il punto è far vedere che la serie in $(*)$ converge totalmente con tutte le derivate fino all'ordine 2.

Passo1 : convergenza della serie in $(*)$

$$D_t^h D_x^k v_n = \alpha_n (inv)^h (in)^k e^{in(x+vt)}$$
$$+ \beta_n (-inv)^h (in)^k e^{in(x-vt)}$$

Quindi

$$\| D_t^h D_x^k v_n \|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leqslant v^h |n|^{h+k} \left(|\alpha_n| + |\beta_n| \right)$$

dalle formule

$$\alpha_n := \frac{c_n^0}{2} + \frac{c_n^1}{2inv} \quad , \quad \beta_n := \frac{c_n^0}{2} - \frac{c_n^1}{2inv} \; ,$$

ottengo $|\alpha_n|, |\beta_n| \leqslant \frac{|c_n^0|}{2} + \frac{|c_n^1|}{2|n|v}$, quindi

$$\| D_t^h D_x^k v_n \|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leqslant v^h |n|^{h+k} \left(|c_n^0| + \frac{|c_n^1|}{|n|v} \right)$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{n \neq 0} \| D_t^h D_x^k v_n \|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leqslant v^h & \sum_{n \neq 0} |n|^{h+k} |c_n^0| \\ & + v^{h-1} \sum_{n \neq 0} |n|^{h+k-1} |c_n^1| . \end{aligned}$$

Le ipotesi su c_n^0 e c_n^1 implicano che

$$\sum_{n \neq 0} \| D_t^h D_x^k v_n \|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} < +\infty \quad \text{se} \quad h+k \leqslant 2 .$$

Questo dimostra che $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e

$$D_t^h D_x^k u = \sum_{-\infty}^{\infty} D_t^h D_x^k v_n \qquad (1)$$

(lemma visto nelle lezioni precedenti)

Passo 2: $u_{tt} = v^2 u_{xx}$ perché l'equazione è lineare, gli addendi v_n la soddisfano e vale (1) per u_{tt} e u_{xx}.

Passo 3: u è 2π-per. in x e quindi soddisfa le condizioni di periodicità in (P).

Passo 4: u soddisfa le condizioni iniziali in (P).

Infatti

$$c_n(u(0,\cdot)) = c_n^0 = c_n(u^0) \Rightarrow u(0,\cdot) = u_0 \ \cancel{q}.\text{ovunque}$$

↑ per via del prob. di Cauchy che determina c_n

$$c_n(u_t(0,\cdot)) = \dot{c}_n(u(0,\cdot)) = c_n^1 = c_n(u_1) \Rightarrow u_t(0,\cdot) = u_1 \ \cancel{q}.o.$$

↑ lemma nella lezione precedente

Passo 5: se u_0, u_1 sono reali, $c_n^0 = \overline{c_{-n}^0}$ e $c_n^1 = \overline{c_{-n}^1}$ e quindi v_0 è reale e $v_n + v_{-n}$ è reale.

Verificatelo! □

Teorema 4 (Unicità)

Sia $u : I \times [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ soluzione C^2 di (P)
$\underset{\uparrow \text{ intervallo che contiene } 0}{I}$

Allora u è unica.

Dim. Basta dimostrare che $c_n(t) := c_n(u(t,\cdot))$ sono univocamente determinati da (P), e più precisamente risolvono

$$\begin{cases} \ddot{y} = -n^2 v^2 y \\ y(0) = c_n^0 \\ \dot{y}(0) = c_n^1 \end{cases}$$

La dimostrazione è la stessa che per l'eq. del calore. $\square$

Osservazione conclusiva

- Se u risolve $u_{tt} = v^2 u_{xx}$ allora anche $u(-t,\cdot)$ risolve $u_{tt} = v^2 u_{xx}$.
  Questo spiega perché l'eq. delle onde si risolve sia nel futuro che nel passato (a diff. dell'eq. del calore).

- Risolubilità nel futuro e nel passato $\Rightarrow$ la regolarità della sol. e la stessa dei dati iniziali (nessun effetto regolarizzante).

AM3 20/21

Lezione 23

12/11/2020

Varianti della Serie di Fourier e applicazioni

A| Serie di Fourier su $[-\pi,\pi]^d$.

Data $u \in L^2([-\pi,\pi]^d)$

prodotto scalare in $\mathbb{R}^d$

$$u(x) = \sum_{\underline{n}\in\mathbb{Z}^d} c_{\underline{u}} \cdot e^{i\underline{n}\cdot x}$$

con $c_{\underline{u}} = c_{\underline{u}}(u) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} u(x) \cdot e^{-i\underline{n}\cdot x}\, dx$

base sottointesa : $\mathcal{F} = \left\{ \frac{e^{i\underline{u}\cdot x}}{(2\pi)^{d/2}} : \underline{u}\in\mathbb{Z}^d \right\}$

Per dimostrare che $\mathcal{F}$ è una base potete procedere come nel caso $d=1$.

Oppure usate che $\frac{e^{i\underline{u}\cdot x}}{(2\pi)^{d/2}} = \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{i n_j x_j}}{\sqrt{2\pi}}$

e il fatto generale che se $\{e_n : n\in\mathbb{Z}\}$ è una base di $L^2(X)$ allora

$$\left\{ \prod_{j=1}^{d} e_{n_j}(x_j) : n_1,\dots,n_d \in \mathbb{Z} \right\}$$

è una base di $L^2(X^d)$.

Formule significative : Data $u \in C^1_{per}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$

(cioè $u: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-per. in ogni variabile)

allora $c_{\underline{n}}(\nabla u) = i\underline{n}\, c_{\underline{n}}(u) \quad \forall\, \underline{n} \in \mathbb{Z}^d$.

cioè $c_{\underline{n}}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = i\, n_j\, c_{\underline{n}}(u) \quad \forall \underline{n}, \forall j = 1, \dots, d$.

Data $u \in C^2_{per}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ allora $c_{\underline{n}}(\Delta u) = -|\underline{n}|^2 c_{\underline{n}}(u)$.

Applicazioni : risoluzioni di EDP su $[-\pi, \pi]^d$ con condizioni di periodicità al bordo.

Ad esempio l'eq. del calore e delle onde.

In questo caso i risultati sono gli stessi ottenuti per $d=1$.

B| Serie di Fourier reale su $[-\pi, \pi]$.

Data $u \in L^2([-\pi, \pi])$

$$(*) \qquad u(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

con $a_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u\, dx$; $a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\cos(nx)\, dx$;

$b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\, \sin(nx)\, dx$.

Base sottointesa: $\mathcal{F} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\} \cup \left\{ \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}; \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} : n = 1, 2, \dots\right\}$

Per dimostrare che $\mathcal{F}$ è una base potete procedere come per il caso reale.

Potete anche ottenere (*) direttamente dalla serie di Fourier complessa di u.

C] Serie in seni su $[0,\pi]$.

Data $u \in L^2([0,\pi])$

$$(*) \qquad u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$$

con $b_n = b_n(u) := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx \quad \forall n = 1,2,\dots$

base sottintesa: $\quad \mathcal{F} = \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(nx) \ : \ n = 1,2,\dots \right\}$.

Per dimostrare che $\mathcal{F}$ è una base non si può usare Stone-Weierstrass perché $\operatorname{Span}(\mathcal{F})$ non è un'algebra di funzioni ($\operatorname{sen} x \in \operatorname{Span}(\mathcal{F})$ ma $\operatorname{sen}^2 x \notin \operatorname{Span}(\mathcal{F})$).

Tuttavia (*) — che implica la completezza di $\mathcal{F}$ — può essere ottenuta dalla serie di Fourier reale di $\tilde{u}$, con $\tilde{u}$ estensione dispari di u a $[-\pi,\pi]$.

Formula significativa: Se $u \in C^2([0,\pi])$ e $u(0) = u(\pi) = 0$ allora $b_n(\ddot{u}) = -n^2 b_n(u)$

Applicazioni : risoluzione di EDP (ad esempio eq. del calore e delle onde) con condizioni di Dirichlet al bordo sull' int. spaziale $[0,\pi]$.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(\cdot,0) = u(\cdot,\pi) \quad \text{cond. di Dirich.} \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases}$$

Riflessione

Cosa rende la serie di Fourier (o la serie in seni) così adatta a risolvere alcune EDP significative?

Risposta: la formula che collega $c_n(u)$ e $c_n(u')$ cioè l'identità (formale)

$$\left(\sum c_n e^{inx}\right)' = \sum c_n in e^{inx}$$

Quello che importa è che e^{inx} sono autovettori della derivata e sono ortogonali.

Domanda :

Dato un operatore (differenziale) T, quando è possibile trovare una base ortonormale di autovettori di T ?

Forse se T è autoaggiunto ?

Definizione

Dato H spazio di Hilbert, D sottospazio denso, $T: D \longrightarrow H$ lineare (non necessariamente continuo), dico che T è autoaggiunto se

$$\langle Tx ; y \rangle = \langle x ; Ty \rangle \quad \forall x, y \in D$$

Proposizione

Sia $T: D \subset H \longrightarrow H$ autoaggiunto. Allora:

(a) gli autovalori di T sono reali

$\uparrow$ $\lambda \in \mathbb{C}$ è autov. se $\exists v \neq 0$ t.c. $Tv = \lambda v$

(b) dati $\lambda_1 \neq \lambda_2$ autovalori, i corrispondenti autospazi V_{λ_1} e V_{λ_2} sono ortogonali.

Questo è un enunciato già visto ad Algebra lineare.

Purtroppo T autoaggiunto non basta ad avere un teorema spettrale (qualcosa del tipo $\overline{\bigoplus_{\lambda \text{ autov}} V_\lambda} = H$). In particolare potrebbero non esservi autovalori, neanche se T è continuo.

$\longrightarrow$ Corso di Istituzioni di Analisi.

Esempi

1. $H = L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$, $D := C^2_{per}$, $T : u \longmapsto -\ddot{u}$.

   a) T è autoaggiunto;

   b) T è semidefinito positivo;

   c) $\lambda_n = n^2$ con $n = 0, 1, \dots$ sono gli autovalori con autospazi $V_n = \mathrm{Span}\{e^{\pm inx}\}$.

   E si può trovare una base di Hilbert di autovettori di T (già visto!).

Dim.

Passo 1. Date $u, v \in D$

$$\langle Tu; v\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} -\ddot{u}\,\bar{v}\,dx$$

integr. per parti $\rightarrow$ $= \underbrace{-\Big|\dot{u}\bar{v}\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \int_{-\pi}^{\pi} \dot{u}\,\overline{\dot{v}}\,dx = \langle \dot{u};\dot{v}\rangle$

perché $\dot{u}\bar{v}$ è 2π-per.

a) $\langle Tu; v\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Passo1}}}{=} \langle \dot u; \dot v\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Passo1}}}{=} \langle u; Tv\rangle$

quindi T è autoaggiunto.

b) $\langle Tu; u\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{passo1}}}{=} \langle \dot u; \dot u\rangle = \|\dot u\|_2^2 \geq 0.$

cioè T è semidef. positivo.

c) Sono calcoli su eq. diff. ordinarie: si tratta di risolvere $-\ddot u = \lambda u$ con condizioni di periodicità ....

2. $H := L^2([-\pi,\pi])$; $D := C^2([-\pi,\pi])$, $T : u \longmapsto -\ddot u$.
Allora T non è autoaggiunto!
Verificatelo voi.

3. $H = L^2([0,\pi])$; $D = \{u \in C^2([0,\pi]) : u(0) = u(\pi) = 0\}$;
$T : u \longmapsto -\ddot u$.

(a) T è autoaggiunto;
(b) T è definito positivo;
(c) $\lambda_n = n^2$ con $n = 1, 2, \dots$ sono gli autovett. di T con autospazi $V_n = \mathrm{Span}\{\mathrm{sen}(nt)\}$.

In particolare esiste una base di H. di autovettori di T.

Formula chiave : $\forall u, v \in D$

$$\langle Tu ; v\rangle = \underbrace{-\left| \dot{u} v \right|_0^{\pi}}_{\overset{\parallel}{0}} + \int_0^{\pi} \dot{u}\dot{v}\, dx = \langle \dot{u} ; \dot{v} \rangle$$

perché $v(0)=v(\pi)=0$

Fate voi il resto...

4. $H = L^2([0,1])$; $D = H$; $T: u \longmapsto u \cdot g$ con $g \in L^\infty([0,1])$. Allora:

(a) T è autoaggiunto;

(b) se $g > 0$ T è def. pos.;

(c) se g è iniettiva, T non ha autovalori.

Dim.

(a) : $\langle Tu ; v\rangle = \int_0^1 g \cdot u \cdot v \, dx = \langle u ; Tv \rangle$

(b) : $\langle Tu , u \rangle = \int_0^1 g\, u^2\, dx \geq 0$ e vale $=$ sse $gu^2 = 0$ q.o., cioè $u = 0$ q.o.

(c) dato $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in H$, $Tu = \lambda u \Rightarrow$

$gu = \lambda u \Rightarrow g = \lambda$ q.o. in $\{x : u \neq 0\}$.

$\Rightarrow |\{x : u \neq 0\}| = 0 \Rightarrow u = 0$ q.o.

Non ci sono autovettori.

Disuguaglianza Isoperimetrica nel piano

Teorema

Sia D un compatto in $\mathbb{R}^2$ con ∂D di classe C^1.
Sia $A := |D|$; $L :=$ perimetro di D = lungh. di ∂D.
Allora

$$L^2 \geq 4\pi A$$

e vale = se e solo se A è un disco.

Corollario Tra tutti i D con area fissata quelli di perimetro minimo sono i dischi.

Traccia di dim. nel caso ∂D sia parametrizzato da un'unica curva γ. (Ci si può ricondurre a questo caso — provateci!)

Posso supporre che $\gamma : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ abbia velocità costante $\left(|\dot\gamma(t)| = \frac{L}{2\pi} \ \forall t \right)$ e percorra ∂D in senso antiorario.

Passo 1: $L^2 = 2\pi \, \|\dot\gamma\|_2^2$.

Passo 2: $A = \frac{1}{2} \langle -i\dot\gamma ; \gamma \rangle$

$$\langle \dot\gamma ; \gamma \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \dot\gamma \, \bar\gamma \, dt \underset{\substack{\uparrow \\ \gamma = \gamma_x + i\gamma_y}}{=} \int_\gamma (x - iy)\,dx + (y + ix)\,dy$$

Gauss-Green $\longrightarrow = \int_D 2i \, dx\,dy = 2i A$

Passo 3:

$$L^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{passo1}}}{=} 2\pi \|\dot\gamma\|_2^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Parseval}}}{=} 4\pi \sum_n |c_n(\dot\gamma)|^2$$

$$= 4\pi \sum_n n^2 |c_n(\gamma)|^2$$

$n^2 \geqslant n \ \forall n \in \mathbb{Z}$ e vale $=$ sse $n=1$ o 0 $\longrightarrow$ $$\geqslant 4\pi \sum_n n\, |c_n(\gamma)|^2$$

$$= 4\pi \sum_n c_n(-i\dot\gamma) \cdot \overline{c_n(\gamma)}$$

Parseval $\longrightarrow$ $$= 2\pi \langle -i\dot\gamma \,;\, \gamma \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Passo2}}}{=} 2\pi A \,.$$

Passo 4. Vale $=$ nella catena sopra sse $c_n = 0 \ \forall n \neq 0,1$, cioè $\gamma(t) = c_0 + c_1 e^{it}$ che è una circonferenza.

□

AM3 20/21

Lezione 24

16/11/2020

Esercizi

1

$$\begin{cases} u_t = 2t\, u_{xx} & \text{sull' intervallo spaz. } [-\pi,\pi] \\ \text{Condizioni di periodicità al bordo} \\ u(0,\cdot) = u_0 \leftarrow \text{funzione data} \end{cases}$$

Cerco una formula risolutiva scrivendo u in serie di Fourier in x:

$$u(t,x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(t)\, e^{inx}$$

$$u_t = \sum_{-\infty}^{\infty} \dot{c}_n(t)\, e^{inx}$$

$$\|$$

$$2t\, u_{xx} = 2t \sum_{-\infty}^{\infty} -n^2 c_n(t) e^{inx} = \sum_{-\infty}^{\infty} -2n^2 t\, c_n(t) e^{inx}$$

Quindi c_n risolve

$$(**) \qquad \begin{cases} \dot{y} = -2n^2 t\, y \\ y(0) = c_n^0 := c_n(u_0) \end{cases}$$

cioè $c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2t^2}$.

la soluzione di (P) dovrebbe essere

$$(*) \qquad u(t,x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \underbrace{c_n^0 e^{-n^2t^2} e^{inx}}_{u_n}$$

Teorema di esistenza

Se $u_0 : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ continua t.c. $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n^0| < +\infty$ allora

(a) $(*)$ definisce una funzione $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua, 2π-periodica in x;

(b) u è C^∞ su $(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}$;

(c) u risolve (P)

(a) uso che

$$\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})} = |c_n^0|$$

e quindi la serie in $(*)$ converge tot. su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, e in particolare u è continua.

(b) Osservo che $\forall\, h, k = 0, 1, 2, \dots$

$$D_t^h D_x^k u_n = c_n^0\, P_h(n,t)\, (in)^k\, e^{-n^2t^2} e^{inx}$$

con P_h polinomio in n e t di grado d_h in n.

Fisso $\delta > 0$ e pongo $R_\delta^+ := [\delta, \frac{1}{\delta}] \times \mathbb{R}$ e $R_\delta^- := [-\frac{1}{\delta}, -\delta] \times \mathbb{R}$.

$$\| D_t^h D_x^k u_n \|_{L^\infty(R_\delta^\pm)} \leq |c_n^0|\, C_h |n|^{d_h + k} e^{-n^2\delta^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Quindi $\sum D_t^h D_x^k u_n$ converge totalmente su $R_\delta^\pm$ e quindi u è C^∞ su $R_\delta^\pm$ e quindi è C^∞ su $\bigcup_{\delta>0}\left(\mathrm{Int}(R^+_\delta)\cup \mathrm{Int}(R^-_\delta)\right) = (\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}$.

(c) Come al solito....

Teorema di unicità

Sia I intervallo che contiene 0, $u: I\times[-\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{C}$ funzione continua, C^1 in t e C^2 in x su $(I\setminus\{0\})\times[-\pi,\pi]$, che risolve (P). Allora u è unica.

L'unicità dei coeff. di F. $c_n(t)$ segue dal fatto che c_n risolve il prob. di Cauchy $(**)$.

2 Risolvere

$$(P)\quad\begin{cases} u_t = D^4_x u + e^{-t}v(x) \\ u(\cdot,0)=u(\cdot,\pi)=0 \\ u(0,\cdot)=0\end{cases}$$

funzione data continua sull'int. spaz. $[0,\pi]$

cond. di Dirichlet

Scrivo u e v in serie di seni in x,

$$u(t,x)=\sum_1^\infty b_n(t)\,\mathrm{sen}(nx)\ ;\qquad v(x)=\sum_1^\infty c_n\,\mathrm{sen}(nx).$$

$$u_t = \sum_1^\infty \dot b_n(t)\,\mathrm{sen}(nx)$$

$$\|$$

$$D^4_x u+e^{-t}v = \sum_1^\infty\left(b_n(t)\,n^4+e^{-t}c_n\right)\mathrm{sen}(nx)$$

Quindi b_n risolve

$$\begin{cases} \dot{y} = n^4 y + e^{-t} c_n \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

cioè $b_n(t) = \frac{c_n}{1+n^4} \left(e^{n^4 t} - e^{-t} \right)$.

La soluzione di (P) dovrebbe essere

$$(*) \qquad u(t,x) = \sum_1^\infty \underbrace{\frac{c_n}{1+n^4} \left(e^{n^4 t} - e^{-t} \right) \operatorname{sen}(nx)}_{u_n}$$

Mi aspetto convergenza puntuale solo per $t \leq 0$ e mi aspetto conv. totale per $t \in [-m, 0]$ ma non per $t \in (-\infty, 0]$.

Preso $m > 0$, pongo $R_m := [-m, 0] \times \mathbb{R}$ e osservo che

$$\| u_n \|_{L^\infty(R_m)} \leq \frac{|c_n|}{1+n^4} \left(1 + e^m \right) = O\left(\frac{1}{n^4} \right)$$

quindi la serie $\sum u_n$ converge totalmente su R_m, quindi u è ben definita e continua su R_m e anche su $\bigcup_{m>0} (-m, 0] \times \mathbb{R} = (-\infty, 0] \times \mathbb{R}$

Similmente uno dimostra che se $\sum |c_n| < +\infty$ allora u è C^1 su $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}$ e C^4 in x su $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}$. Inoltre D_t, D_x^k commutano con la serie che definisce u. $\Big\}$ $k = 1, 2, 3, 4$

Si dimostra allora:

Teorema (di esistenza)

Se $v : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ è continua e $\sum_1^\infty |c_n| < +\infty$ allora u data in $(*)$ è una funzione C^1 e C^4 in x su $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}$ che risolve (P).

Si ottiene una dimostrazione più semplice scrivendo u come

$$u(t,x) = \underbrace{\sum_1^\infty \frac{c_n}{1+n^4} e^{n^4 t} \operatorname{sen}(nx)}_{w(t,x)} - e^{-t} \underbrace{\sum_1^\infty \frac{c_n}{1+n^4} \operatorname{sen}(nx)}_{f(x)}$$

si ottiene infatti che w e C^∞ su $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}$ e f è C^4 in $\mathbb{R}$ se $\sum |c_n| < +\infty$.

Si dimostra anche un teorema di unicità e di non esistenza nel futuro per v generica, anche regolare.

3| Esempio di non unicità.

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{su } [-\pi,\pi] \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases}$$

La soluzione non è unica.

Infatti potete trovare una soluzione u_1 con condizioni di periodicità al bordo e una u_2 con condizioni di Dirichlet al bordo (usando un' opportuna serie in seni).

E queste due soluzioni non coincidono.

Infatti

$$u_1(t,x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n^0 \, e^{-n^2 t} e^{inx}$$

e quindi

$$u_1(t, \pm\pi) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n^0 (-1)^n e^{-n^2 t}$$

e questa funzione non è mai 0, e quindi $u_1 \neq u_2$.

4 Esempio di non esistenza (né nel passato né nel futuro).

$$(P) \begin{cases} u_{ttt} = -8 u_{xx} \\ \text{Condiz. di periodicità al bordo} \\ u(0,\cdot) = u_0 \\ u_t(0,\cdot) = u_{tt}(0,\cdot) = 0 \end{cases} \quad \Big\} \text{ Condizioni iniziali.}$$

Non ha soluzione né nel passato né nel futuro per u_0 generale, anche C^∞_{per}.

Scrivendo $u(t,x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(t)\, e^{inx}$ ottenete che c_n risolve

$$\begin{cases} \dddot{y} = 8n^2 y \\ y(0) = c_n^0 := c_n(u_0) \\ \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

eq. caratt. $\lambda^3 = 8n^2$ ha sol. $2n^{2/3}$, $n^{2/3}(-1 \pm \sqrt{3}\, i)$

e

$$c_n(t) = c_n^0 \left(\frac{1}{3} e^{2n^{2/3} t} + \frac{2}{3} e^{-n^{2/3} t} \cos\left(\sqrt{3}\, n^{2/3} t\right) \right)$$

In generale $c_n(t) \not\to 0$ sia per $t > 0$ che per $t < 0$

In particolare prendendo

$$c_n^0 = e^{-|n|^{1/2}} \qquad u_0 = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-|n|^{1/2}} e^{inx}$$

allora $u_0 \in C^\infty_{per}$ ma $c_n(t) \not\to 0$ per $t \neq 0$

quindi non può esistere alcuna sol. u.