AM3 20/21

Lezione 12

19/10/2020

Spazi di Hilbert

H spazio vettoriale reale con prodotto scalare $\langle \, ; \, \rangle$. $\longrightarrow$ bilineare, simmetrico, definito pos.

$\|\cdot\|$ norma associata: $\|x\| = (\langle x, x\rangle)^{1/2}$.

La sub-addività di $\|\cdot\|$ segue dalla disug. di Schwartz: dati $x_1, x_2 \in H$, $\langle x_1 ; x_2 \rangle \leq \|x_1\| \, \|x_2\|$

$$\begin{aligned} \|x_1 + x_2\|^2 &= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + 2\langle x_1 ; x_2\rangle \\ &\leq \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + 2\|x_1\| \, \|x_2\| = (\|x_1\| + \|x_2\|)^2 \end{aligned}$$

Vale l'identità di polarizzazione:

$$\langle x_1 ; x_2 \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x_1 + x_2\|^2 - \|x_1 - x_2\|^2 \right).$$

Nel seguito do per scontati i risultati visti nel corso di Algebra lineare.

Osserv. La continuità di $\|\cdot\|$ + ident. di polarizz. $\Longrightarrow$ continuità di $\langle \cdot ; \cdot \rangle$.

Definizione

H si chiama spazio di Hilbert se è completo.

Nel seguito uso la lettera H solo per spazi di Hilbert.

Esempi

- dati $X, \mathcal{A}, \mu$, allora $L^2(X)$ è uno spazio di H.

  (e lo stesso vale per $L^2(X; \mathbb{R}^k)$). Già visto in prec.

- sia $\ell^2 := \{ x = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < +\infty \}$

  con $\langle x, y \rangle := \sum_n x_n y_n$.

  Allora ℓ^2 è uno spazio di Hilbert.

  Caso particolare del precedente con $X = \mathbb{N}$ e μ misura che conta i punti.

Definizione

$\mathcal{F} \subset H$ è un sistema ortonormale se $\langle e, e' \rangle = 0$ $\forall e, e' \in \mathcal{F}$ con $e \neq e'$, e $\|e\| = 1$ $\forall e \in \mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ è un sistema ortonormale completo, o base di Hilbert di H, se $\underset{\uparrow}{\text{span}(\mathcal{F})}$ è denso in H.

{Comb. lin. finite in $\mathcal{F}$}

Osserv. In generale una base di Hilbert $\mathcal{F}$ non è una base di H nel senso del corso di Alg. lin. (cioè una base algebrica) perché $\text{Span}(\mathcal{F})$ può essere diverso da H.

Esempio

In ℓ^2 prendo $\mathcal{F} = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ dove $\forall n \in \mathbb{N}$

$$e_n := (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{n-esima coord.}}}{1}, 0, \dots) .$$

E' immediato verificare che $\mathcal{F}$ è un sistema ortonormale.
Inoltre $\mathcal{F}$ è completo: dato $x = (x_n) \in \ell^2$ pongo $\forall m$

$$T_m x := (x_0, \dots, x_m, 0, \dots) ;$$

allora $T_m x \in \mathrm{Span}(\mathcal{F})$ $\forall m$, e $T_m x \xrightarrow[m \to +\infty]{} x$ in ℓ^2.

Teorema 1 (della base di H.)

Sia $\mathcal{F} = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ sistema ortonormale in H e $\forall x \in H$, $n \in \mathbb{N}$, sia $x_n := \langle x ; e_n \rangle$ (coord. n-esima di x).

Allora:

(i) $\sum_n x_n^2 \leqslant \|x\|^2$ (disug. di Bessel);

(ii) la serie $\sum_n x_n e_n$ converge a un qualche $\bar{x} \in H$ e $\bar{x}_n = x_n \ \forall n$;

(iii) $\|\bar{x}\|^2 = \sum x_n^2 \leqslant \|x\|^2$;

(iv) $x - \bar{x} \perp e_n \ \forall n \implies x - \bar{x} \perp \overline{\text{span}(\mathcal{F})}$;

(v) se $\mathcal{F}$ è completo (cioè base di H.) allora $x = \bar{x}$ e in partic.

$$\boxed{x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n}, \quad \underbrace{\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2}_{\text{identità di Parseval}}.$$

Corollario 2 Sia $\mathcal{F} = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ base di Hilbert di H, siano $x, x' \in H$ con coordinate x_n e x'_n.

Allora:

(i) $x_n = x'_n \ \forall n \implies x = x'$;

(ii) $\langle x ; x' \rangle = \sum_n x_n \cdot x'_n$ (identità di Parseval);

(iii) data $(a_n) \in \ell^2$, $\sum_n a_n e_n$ converge ad un certo $\bar{x} \in H$, e $\bar{x}_n = a_n$;

(iv) $x \in H \longmapsto (x_n) \in \ell^2$ è un' isometria (surg.).

Osserv.

- Nel teorema 1 serve che H sia di Hilbert in (ii), mentre (i) e (v) sono veri anche se H non è completo.
- Nel teor. 1 e Cor. 2 ci siamo limitati al caso di $\mathcal{I}$ numerabile. Il caso $\mathcal{I}$ finito è Alg. lin. Il caso $\mathcal{I}$ più che numerabile lo vediamo dopo.

Lemma 3

Sia $\mathcal{I} = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ sistema ortonorm. in H, e sia $(a_n) \in \ell^2$. Allora:

(i) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n$ converge a $\bar{x} \in H$;

(se $\sum |a_n| < +\infty$ la convergenza di $\sum a_n e_n$ è già stata vista, ma $\sum_n a_n^2 < +\infty \not\Rightarrow \sum_n |a_n| < +\infty$)

(ii) $\bar{x}_n = a_n \ \forall n$;

(iii) $\|\bar{x}\|^2 = \sum a_n^2$.

Dim. $\forall m$ pongo $y_m := \sum_{n=1}^{m} a_n e_n$.

(i) Devo far vedere che (y_m) è di Cauchy in H

Presi $m < m'$

$$y_{m'} - y_m = \sum_{n=m+1}^{m'} \underbrace{a_n e_n}_{\text{vettori ortogonali}} \Longrightarrow \|y_{m'} - y_m\|^2 = \sum_{n=m+1}^{m'} a_n^2$$

$$\leq \underbrace{\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n^2}_{\text{Coda di ser. convergente}}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ $\exists\, m_\varepsilon$ t.c. $\sum_{m_\varepsilon+1}^{\infty} a_n^2 \leq \varepsilon^2$ e quindi $\forall\, m, m' \geq m_\varepsilon$

$$\| y_{m'} - y_m \| \leq \varepsilon .$$

(ii) $\forall\, m > n$, $\langle y_m ; e_n \rangle = a_n$

(uso la continuità di $\langle\, ; \rangle$)

$$\begin{tikzcd} \langle y_m ; e_n \rangle = a_n \arrow[d, "m \to +\infty"] \\ \langle x ; e_n \rangle \end{tikzcd}$$

(iii) $\forall\, m$,

(continuità di $\| \cdot \|$)

$$\begin{tikzcd} \| y_m \|^2 \arrow[d, "m \to +\infty"] & = & \sum_{n=0}^{m} a_n^2 \arrow[d, "m \to +\infty"] \\ \| \bar{x} \|^2 & & \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \end{tikzcd}$$

□

Dim. teorema 1

(i) fisso m e scrivo x come

$$x = \sum_{n=0}^{m} x_n e_n + y$$

osservo che gli addendi a destra sono a due a due ortogonali

$(\forall\, i \leq m ,\ \langle y , e_i \rangle = \langle x - \sum_{n=0}^{m} x_n e_n ; e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - x_i = 0)$

Quindi

$$\| x \|^2 = \sum_{n=0}^{m} \| x_n e_n \|^2 + \| y \|^2 \geq \sum_{n=0}^{m} | x_n |^2$$

concludo prendendo il sup su m.

(ii) e (iii) seguono da (i) e lemma 3.

(iv) $\forall n \quad \langle x-\bar{x}, e_n\rangle = x_n - \bar{x}_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per (ii)}}}{=} 0$

cioè $x-\bar{x} \perp e_n$

$\Rightarrow x-\bar{x} \perp \mathrm{Span}(\mathcal{Y})$

$\Rightarrow x-\bar{x} \perp \overline{\mathrm{Span}(\mathcal{Y})}$ per continuità del prodotto scal.

(v) Siccome $\overline{\mathrm{Span}(\mathcal{Y})} = H$, quindi $x-\bar{x} \perp H$ (per (iv)) $\Rightarrow x-\bar{x} = 0$.
Il resto segue da (ii) e (iii). □

Dim. Corollario 2

(i) segue dal Teorema 1(v).

(ii) (x_n) e (x'_n) sono in ℓ^2 (per Bessel), quindi $\sum_n x_n \cdot x'_n$ converge e l'ident. di Parseval segue da teorema 1(v) + identità di polarizzazione.

(iii) è contenuto nel lemma 3.

(iv) segue da Parseval + (iii). □

Osservazioni sparse sulle basi di Hilbert

Sia $\mathcal{F}$ sistema orton. in H.

- se $\mathcal{F}$ è infinito non è una base algebrica di H.

  Presi $(e_n) \subset \mathcal{F}$, considero $\bar{x} := \sum_{0}^{\infty} 2^{-n} e_n$.

  Allora $\bar{x} \in H \setminus \operatorname{span} \mathcal{F}$ (verificatelo!)

- Se $\mathcal{F}$ è una base di Hilbert, e H ha dim. infinita, allora

$$\mathcal{F} \text{ numerabile} \iff H \text{ è separabile}$$

Dim.

combinazioni lineari a coeff. razionali

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ base $\Rightarrow H = \overline{\operatorname{span}(\mathcal{F})} = \overline{\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{F})}$

e se $\mathcal{F}$ è numerabile allora $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{F})$ è numer.

$\Leftarrow$ H separabile $\Rightarrow$ data $\mathcal{G} \subset H$ $\delta > 0$ t.c. $\|x - x'\| \geq \delta$ $\forall x, x' \in \mathcal{G}$ con $x \neq x'$, allora $\mathcal{G}$ è numerabile $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ è numerabile (perché $\|e - e'\| = \sqrt{2}$ $\forall e, e' \in \mathcal{F}, e \neq e'$).

□

- $\mathcal{Y}$ è completo (cioè è una base di H.) se e solo se è massimale (nella classe dei sistemi ortonormali, rispetto all' inclusione).

Dim. completo $\Rightarrow$ massimale (non serve la completezza di H)

$\mathcal{Y}$ completo $\Rightarrow \overline{\text{Span}(\mathcal{Y})} = H$

$$\Rightarrow \mathcal{Y}^\perp = (\text{Span}(\mathcal{Y}))^\perp \underset{\uparrow}{=} \left(\overline{\text{Span}(\mathcal{Y})}\right)^\perp = H^\perp = \{0\}$$

Continuità del prod. scal.

$\Rightarrow \mathcal{Y}$ è max.

non completo $\Rightarrow$ non massimale (serve che H è Hilbert)

(Dimostrazione solo per H separabile)

$\mathcal{Y}$ non completo $\Rightarrow \exists\, x \in H \setminus \overline{\text{Span}(\mathcal{Y})}$

prendo $\bar{x}$ come nel teorema 1, quindi

$x - \bar{x} \perp \mathcal{Y} \Rightarrow \mathcal{Y}' := \mathcal{Y} \cup \left\{\frac{x-\bar{x}}{\|x-\bar{x}\|}\right\}$ è un sist. ortog. $\Rightarrow \mathcal{Y}$ non è max.

- Per il lemma di Zorn esiste $\mathcal{Y}'$ sist. orton. massimale che contiene $\mathcal{Y}$, cioè $\mathcal{Y}$ può essere completato a una base di Hilbert.

AM3 20/21

Lezione 13
21/10/2020

Osservazioni sparse sugli spazi di Hilbert (continuazione)

- Sia $\mathcal{F} = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, e sia $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bigezione. Preso $x \in H$ e $x_n := \langle x, e_n \rangle$ come nel Teorema 1, è vero che
$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} e_{\sigma(n)} \quad ?$$

Domanda legittima visto che in generale $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ può essere $+\infty$, cioè la serie non converge totalmente.

Risposta: Sì!

Sia $\bar{x} = \sum_{n} x_n e_n$ e $\tilde{x} = \sum_{n} x_{\sigma(n)} e_{\sigma(n)}$

(notare che $\tilde{x}$ esiste ...).

Allora $\langle \bar{x}, e_n \rangle = \langle \tilde{x}, e_n \rangle = x_n \ \forall n$,

e quindi $\bar{x} = \tilde{x}$.

Si dice quindi che la serie $\sum_{n} x_n e_n$ converge incondizionatamente

La versione pulita del Teor. 1 richiederebbe definire $\mathcal{F}$, $\sum |x_n|^2$, $\sum x_n e_n$ senza numerare gli elementi di $\mathcal{F}$.

Si può fare....

- Esempio di base non numerabile:
  Sia X insieme più che numerabile, μ misura che conta i punti.
  Allora $L^2(X)$ non è separabile e non ha basi numerabili.
  Infatti una base è
  $$\mathcal{F} := \{ e_x \; : \; x \in X \}$$
  dove $e_x : X \longrightarrow \mathbb{R}$ data da $e_x : y \longmapsto \delta_{xy}$
  cioè $e_x(y) = 1$ se $y = x$, $e_x(y) = 0$ se $y \neq x$.

  E' immediato vedere che $\mathcal{F}$ è un sistema ortonormale più che numerabile ($\Longrightarrow L^2(X)$ non sep.)
  Fate vedere che è una base.

- Come va modificato il teorema 1 se $\mathcal{F}$ è un sist. orton. più che numerabile?
  Per ogni $e \in \mathcal{F}$, $x \in H$, pongo $x_e := \langle x, e \rangle$.
  Definisco
  $$\sum_{e \in \mathcal{F}} |x_e|^2$$
  come sup delle sottosomme finite o equiv. come integrale (su $\mathcal{F}$ rispetto alla mis. che conta i punti).

(i) diventa : $\sum_{e\in\mathcal{F}} |x_e|^2 \leq \|x\|^2$.

In particolare $\{e : x_e \neq 0\}$ è numerabile.
Ne prendo una numerazione :

$$\{e : x_e \neq 0\} = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$$

(ii) diventa $\sum_n x_{e_n} \cdot e_n$ converge
a $\bar{x} \in X$.

Si deve far vedere che $\bar{x}$ NON dipende
dalla numerazione di $\{e : x_e \neq 0\}$

Alternativa "pulita" : definire $\sum_{e\in\mathcal{F}} x_e \cdot e$
senza ricorrere a numeraz.

Teorema 4

Sia V sottospazio chiuso di H. Allora:

(i) $\forall x \in H$ esistono $\bar{x} \in V$ e $\tilde{x}$ in $V^\perp$ t.c.

$$x = \bar{x} + \tilde{x}$$

(in breve $H = V + V^\perp$).

(ii) $\bar{x}$ e $\tilde{x}$ sono unici, e vengono indicati con x_V e $x_{V^\perp}$ (proiezioni ortogonali di x su V e $V^\perp$ risp.).

(iii) $\bar{x}$ è univocamente caratterizzato come il punto di V più vicino a x, cioè l'unico minimo di $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(y) := |y - x|$.
(cioè la proiezione di x su V in senso algebrico coincide con la proiezione metrica).

Osserv.

- Per (i) è necessario che V sia chiuso
  Se per esempio V è denso in H, ma $V \neq X$, allora $V + V^\perp = V + \overline{V}^\perp = V + H^\perp = V + \{0\} = V \neq H$.
  Un esempio di tale V è $\text{span}(\mathcal{F})$ con $\mathcal{F}$ base di H. (H di dim. infinita).
- La completezza di H è necessaria.

Dim.

(i) V chiuso $\Rightarrow$ V completo $\Rightarrow$ V Hilbert $\Rightarrow$ esiste $\mathcal{F}$ base di Hilbert di V.

Prendo $\bar{x}$ come nel teorema 1 (ii)

So (teorema 1 (iv)) che $x-\bar{x} \perp \overline{\operatorname{Span}\mathcal{F}} = V$

cioè $x-\bar{x} \in V^{\perp}$; pongo $\tilde{x} := x-\bar{x}$.

(ii) Come nel corso di Alg. lin.:

Se $x = \bar{x}+\tilde{x} = \bar{x}'+\tilde{x}'$ con $\bar{x}, \bar{x}' \in V$, $\tilde{x}, \tilde{x}' \in V^{\perp}$

allora $\underbrace{\bar{x}-\bar{x}'}_{\substack{\cap \\ V}} = \underbrace{\tilde{x}'-\tilde{x}}_{\substack{\cap \\ V^{\perp}}} \in V \cap V^{\perp} = \{0\}$.

Quindi $\bar{x} = \bar{x}'$ e $\tilde{x} = \tilde{x}'$.

(iii) $\forall y \in V$, $\quad f^2(y) = \|x-y\|^2 = \|\overbrace{(x-\bar{x})}^{\substack{\tilde{x}\in V^{\perp} \\ \shortparallel}} + \overbrace{(\bar{x}-y)}^{\substack{V \\ \cup}}\|^2$

$$= \|x-\bar{x}\|^2 + \|\bar{x}-y\|^2$$

$$= f^2(\bar{x}) + \|\bar{x}-y\|^2$$

quindi $f(\bar{x}) \leq f(y)$ e vale "$=$" sse $y = \bar{x}$.

Teorema 5 (rappresentazione dei funz. lineari su X)

Sia $\Lambda : H \to \mathbb{R}$ lineare e continuo.

Allora esiste $x_0 \in H$ t.c. $\Lambda(x) = \langle x ; x_0 \rangle \quad \forall x \in H$.

Chiaramente x_0 è unico.

Osserv.

- E' necessario che Λ sia continuo perché $x \mapsto \langle x ; x_0 \rangle$ è continuo (continuità di $\langle \, ; \, \rangle$).
- Se H ha dimensione infinita esiste $\Lambda : H \to \mathbb{R}$ lineare non continuo.

  Sia $\mathcal{G}$ base algebrica di H, con $\|e\| = 1 \ \forall e \in \mathcal{G}$, e sia $(e_n) \subset \mathcal{G}$.

  Definisco Λ ponendo $\Lambda(e_n) := n$ ($\Lambda(e)$ qualunque e $e \in \mathcal{G} \setminus \{e_n\}$). Allora non esiste alcuna costante $C < +\infty$ t.c. $|\Lambda(x)| \leq C\|x\|$, e quindi Λ non è continua.

- Λ é continuo se e solo se $\operatorname{Ker} \Lambda$ è chiuso.

  (segue dalla dimostrazione, che usa solo che $\operatorname{Ker} \Lambda$ è chiuso).

- E' necessario che H sia completo.

Lemma 6

Dato $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ lineare, $(\mathrm{Ker}\,\Lambda)^\perp$ ha dimensione 0 o 1.

Dim.

Se per assurdo $\dim\left((\mathrm{Ker}\,\Lambda)^\perp\right) \geqslant 2$, allora $(\mathrm{Ker}\,\Lambda)^\perp$ contiene W sottospazio di dim 2.

Allora la restrizione di Λ a W ha Ker banale

(assurdo per un noto teorema di Alg. Lin.)

$\square$

Dim. Teorema 5

Sia $V := \mathrm{Ker}\,\Lambda$. $\quad \Lambda$ continuo $\Rightarrow$ V chiuso.

Se $V = H \Rightarrow \Lambda \equiv 0$ e prendo $x_0 = 0$.

Se $V \neq H$ allora $V^\perp \neq \{0\}$ $\quad (\Leftarrow H = V + V^\perp)$

prendo $x_1 \in V^\perp$ con $\|x_1\| = 1$.

Pongo $x_0 := c x_1$ con $c := \Lambda x_1$, e $\tilde{\Lambda}(x) := \langle x ; x_0 \rangle$

Ho che

- $x \in \overset{= \mathrm{Ker}\,\Lambda}{V} \Rightarrow x \perp x_1 \Rightarrow x \perp x_0 \Rightarrow \tilde{\Lambda}(x) = 0 = \Lambda(x)$

  quindi $\tilde{\Lambda} = \Lambda$ su V
- $\tilde{\Lambda}(x_1) = \langle x_1 ; x_0 \rangle = \langle x_1 , c x_1 \rangle = c \underset{\substack{\| \\ 1}}{\|x_1\|^2} = c = \Lambda(x_1)$

  quindi $\tilde{\Lambda} = \Lambda$ su $\mathrm{Span}(x_1) = V^\perp$

  lemma 6
- $\tilde{\Lambda} = \Lambda$ su $V + V^\perp = H$.

$\square$

AM3 20/21 Lezione 14

22/10/2020

Spazi di Hilbert complessi

Sia H spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ con prodotto Hermitiano $\langle ; \rangle$

Ricordo che
- $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ è lineare nella prima var.,
- $\langle x ; x' \rangle = \overline{\langle x' ; x \rangle} \quad \forall x, x'$
  (quindi $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ è antilineare nella sec. var.)
- $\langle x ; x \rangle \geq 0 \quad \forall x$ e vale $=$ sse $x = 0$.

Come al solito $\|x\| := (\langle x ; x \rangle)^{\frac{1}{2}} \quad \forall x$

Vale Cauchy – Schwarz : $|\langle x ; x' \rangle| \leq \|x\| \cdot \|x'\|$

Identità di polarizzazione : $\langle x ; x' \rangle = \ldots\ldots$ [scrivetela voi]

Se H è completo si dice spazio di Hilbert.

Esempi

- dato $X, \mathcal{A}, \mu$, $L^2(X; \mathbb{C})$ è uno spazio di Hilbert complesso avendo posto
$$\langle u, v \rangle := \int_X u \cdot \overline{v} \, d\mu$$
- $\ell^2_{\mathbb{C}} := \{ x = (x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_n |x_n|^2 < +\infty \}$ con
$$\langle x, y \rangle := \sum_n x_n \cdot \overline{y_n}$$

($\ell^2_{\mathbb{C}} = L^2(X; \mathbb{C})$ con $X = \mathbb{N}$, μ misura che conta i punti)

Teorema della base

Dato $\mathcal{Y} = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ sistema ortonormale in H, $x \in H$
si pone $x_n := \langle x; e_n \rangle \ \forall n$ (attenzione, $\langle x; e_n \rangle \neq \langle e_n, x \rangle$)
tutto il resto dell' enunciato è uguale!

Lemma di Riemann-Lebegue generalizzato

Date $h \in L^\infty(\mathbb{R})$, T-periodica ($h(x+T) = h(x)$ per q.o. x)
e $g \in L^1(\mathbb{R})$ allora

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot h(yx)\, dx \xrightarrow[y \to \pm\infty]{} \overbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx \right)}^{a} \cdot \overbrace{\left(\fint_0^T h(x)\, dx \right)}^{m}$$

media su $[0,T]$

Interpret. probabilistica: se $T = 1$, $\operatorname{supp} g \subset [0,1]$

$$\underbrace{\int_0^1 g(x) \cdot h(nx)\, dx}_{\substack{\text{Valore atteso} \\ \text{delle var. al. su } \mathbb{R} \\ \text{con distrib. } g(x) \\ \text{e } h(nx)}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \underbrace{\left(\int_0^1 g(x)\, dx \right)}_{\substack{\text{valore atteso} \\ \text{di } g(x)}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^1 h(x)\, dx \right)}_{\substack{\text{val. att.} \\ \text{di } h(x) \\ \text{e di} \\ h(nx)}}$$

quindi $g(x)$ e $h(nx)$ diventano "scorrelate" per $n \to +\infty$.

Lemma

Data $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-periodica e positiva (opp. in $L^1(0,T)$)
allora $\int_0^T h(x)\,dx = \int_c^{c+T} h(x-\tau)\,dx \quad \forall c, \tau \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione per esercizio

Dim. del lemma di R-L.

$\forall\, y, s \in \mathbb{R}$ definisco

$$\phi(y,s) := \int_{\mathbb{R}} g(x)\, h(yx+s)\,dx$$

Allora:

(i) $\fint_0^T \phi(y,s)\,ds = ma$;

(ii) $\phi(y,s) - \phi(y,0) \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0 \quad \forall s$.

Dimostro (i)

$$\fint_0^T \phi(y,s)\,ds = \fint_0^T \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, h(yx+s)\,dx \right) ds$$

Fubini ⟶ $= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\underbrace{\fint_0^T h(yx+s)\,ds}_{m \text{ per il lemma}} \right) g(x)\,dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} m\, g(x)\,dx = ma$$

verifica delle ipotesi:

$$\fint_0^T \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\, |h(yx+s)|\,dx \right) ds$$

$$\leq \fint_0^T \|g\|_1 \, \|h\|_\infty \, ds$$

$$= \|g\|_1 \, \|h\|_\infty < +\infty$$

Dimostro (ii). Sia $y \neq 0$

$$\phi(y,s) - \phi(y,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, h(yx+s)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, h(yx)\,dx$$

cambio var. nel primo integrale

$yx+s = yx'$ cioè

$x' = x + \frac{s}{y}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g\left(x' - \frac{s}{y}\right) h(yx')\,dx' - \int_{-\infty}^{\infty} \cdots\cdots$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(g\left(x - \frac{s}{y}\right) - g(x)\right) h(yx)\,dx$$

Quindi

$$|\phi(y,s) - \phi(y,0)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\tau_{\frac{s}{y}} g(x) - g(x)\right| \cdot |h(yx)|\,dx$$

$$\leq \|\tau_{\frac{s}{y}} g - g\|_1 \, \|h\|_\infty \xrightarrow[y \to \pm\infty]{} 0$$

Concludo la dim.:

$$\phi(y,0) - m_a \overset{(i)}{=} \phi(y,0) - \fint_0^T \phi(y,s)\,ds$$

$$= \fint_0^T \left(\phi(y,0) - \phi(y,s)\right) ds \xrightarrow[y \to \pm\infty]{(*)} 0$$

(*) per convergenza dominata. Infatti:

convergenza puntuale: $\phi(y,s) - \phi(y,0) \to 0$ per (ii)

dominazione: $|\phi(y,s)| \leq \|g\|_1 \|h\|_\infty \ldots$

$\square$

Esercizi

1. Ogni norma ϕ su $\mathbb{R}^d$ è equivalente a $\overset{\text{norma Euclidea}}{\overset{\downarrow}{|\cdot|}}$, cioè $\exists\, C_1, C_2 \in (0,+\infty)$ t.c.

$$C_1|x| \leqslant \phi(x) \leqslant C_2|x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Traccia: ϕ convesse e finita $\Longrightarrow$ ϕ continua.

Prendere $C_2 := \max\limits_{S^{d-1}} \phi$, $C_1 := \min\limits_{S^{d-1}} \phi$.

2. Data $T: \mathbb{R}^d \longrightarrow \overset{\text{spazio normato}}{W}$, se T è lineare allora è continua.

$$\|T \underset{(x_1,\dots,x_d)}{\underset{\shortparallel}{x}}\|_W = \Big\| \sum_{i=1}^{d} x_i \cdot T\overset{\text{elementi della base can. di } \mathbb{R}^d}{e_i} \Big\|_W$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{d} |x_i|\, \|Te_i\|_W \underset{\text{Cauchy-Schw. in } \mathbb{R}^d}{\underset{\uparrow}{\leqslant}} |x| \cdot \Big(\sum_i \|Te_i\|_W^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

3. Dato V spazio normato di dimensione infinita esiste $\Lambda: V \longrightarrow \mathbb{R}$ lineare e non continuo.

Sia $\mathcal{G}$ base algebrica di V con $\|e\|_V = 1$ $\forall e \in \mathcal{G}$.

Sia $(e_n) \subset \mathcal{G}$.

Sia Λ definito da $\begin{cases} \Lambda e_n = n & \forall n \\ \Lambda e = \text{quello che volete} & \\ \quad \text{se } e \in \mathcal{G} \setminus \{e_n\} & \end{cases}$

Allora $\Lambda e_n = n$ e $\|e_n\|_W = 1$ implica che

$$\sup_{\|x\|_W \leqslant 1} |\Lambda x| = +\infty \Longrightarrow \Lambda \text{ non è continuo.}$$

4. Sia $V := \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ con la norma $\|\cdot\|_p$. Se $p>1$ allora $\Lambda : V \longrightarrow \mathbb{R}$ dato da $\Lambda u := \int_{\mathbb{R}^d} v \, dx$ é un funzionale lineare non continuo. (Già visto!)

5. Il prodotto di convoluzione $*$ è un prodotto su $L^1(\mathbb{R}^d)$. Dimostrare che non esiste un elemento neutro f, cioè tale che $g*f = g \quad \forall g \in L^1$.

Caso generale con TdF (più tardi)

Supponendo $f \geq 0$, si dimostra che $\int f \, dx = 1$, poi si prende $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ positiva con un unico punto di max. in 0. Allora

$$g(0) = g*f(0) = \int \underset{g(0)\ \forall y \neq 0}{g(\overset{\wedge}{-y})} f(y)\, dy < \int g(0) f(y) dy$$

$= g(0)$.

6. Sia H sp. di Hilbert, e $B = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$. Se $\dim H = +\infty$, B non è compatto.

B non compatto $\Leftarrow$ B non totalmente limitato

$\Leftarrow$ $\exists\, \delta > 0$ e $(x_n) \subset B$ t.c.

$\|x_n - x_m\| \geq \delta \quad \forall n \neq m$

in effetti se (e_n) sono elementi di un sistema ortonormale infinito (e.g. una base di Hilbert) allora $(e_n) \subset B$ & $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ $\forall n \neq m$.

7. Prendo $X \subset \mathbb{R}^d$ con $|X| > 0$, prendo
$B := \{ u \in L^p(X) : \|u\|_p \leq 1 \}$.
Allora B non è compatto.
Prendo una succ. di $E_n \subset X$ disgiunti e con $|E_n| > 0$ (posso trovarli ....) e prendo $u_n := \frac{1}{|E_n|^{1/p}} \mathbb{1}_{E_n}$. Allora
$\|u_n\|_p = 1$ per ogni n.
Inoltre se $n \neq m$, $\|u_n - u_m\|_p = 2^{1/p}$.
Quindi B non è tot. lim. $\Longrightarrow$ B non è compatto.

Oss. Sia V sp. normato di dim. infinita, allora
$B := \{ x \in V : \|x\|_V \leq 1 \}$ non è compatto.

8. Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lim + T-periodica. Per. es. $\operatorname{sen} x$
Considero $h_n(x) := h(nx)$.
Non esistono sotto succ. n_k t.c. $\overset{= h(n_k x)}{h_{n_k}(x)}$ converge punt. q.o. (ma $\forall x$ $\exists n_k$, dipend. da x, t.c. $h(n_k x)$ converge)
Traccia. Se per assurdo $h_{n_k}(x) \longrightarrow \bar{h}(x)$ q.o.
Allora $\forall g \in L^1(\mathbb{R})$

$$\begin{tikzcd}
\int_{\mathbb{R}} h(n_k x)\, g(x)\, dx \arrow[r, "k \to +\infty", "\uparrow \text{R.L.}"'] \arrow[d, "k \to +\infty", "\text{conv. dom.} \Longrightarrow"'] & \int_{\mathbb{R}} m\, g(x)\, dx \\
\int_{\mathbb{R}} \bar{h}(x)\, g(x)\, dx &
\end{tikzcd}$$

con $m = \fint_0^T h\, dx$